

Anneaux à diviseurs et anneaux de Krull (une approche constructive)

T. Coquand, H. Lombardi

9 février 2016

paru dans *Communications in Algebra*, **44** : 515–567, 2016

Quelques typos dans la bibliographie ont été corrigés par rapport à la version publiée et la version 1 sur ArXiv.

Keywords : Divisor theory, PvMD, Constructive mathematics, Krull domains

MSC 2010 : 13F05, 14C20, 06F15, 03F65

Résumé

Nous présentons dans cet article une approche constructive, dans le style de Bishop, de la théorie des diviseurs et des anneaux de Krull. Nous accordons une place centrale aux “anneaux à diviseurs”, appelés PvMD dans la littérature anglaise. Les résultats classiques sont obtenus comme résultats d’algorithmes explicites sans faire appel aux hypothèses de factorisation complète.

Abstract

We give an elementary and constructive version of the theory of “Prüfer v-Multiplication Domains” (which we call “anneaux à diviseurs” in the paper) and Krull Domains. The main results of these theories are revisited from a constructive point of view, following the Bishop style, and without assuming properties of complete factorizations.

Introduction

Nous présentons dans cet article une approche constructive de la théorie des diviseurs.

L’excellent livre *Divisor Theory* [8] traite constructivement la clôture intégrale d’un anneau factoriel dans une extension finie de son corps des fractions. Edwards suppose aussi que l’anneau factoriel possède de bonnes propriétés pour la factorisation des polynômes.

Nous traitons ici de manière constructive un cas plus général dans lequel nous n’avons aucune hypothèse de décomposition en facteurs irréductibles. L’exemple le plus important en pratique reste celui des anneaux géométriques¹ intégralement clos. Et dans ce cas la décomposition d’un diviseur en somme d’irréductibles n’est pas assurée constructivement.

Nous nous situons dans la suite du livre *A Course in Constructive Algebra* [18], où est développée une théorie constructive des domaines de Dedekind (chapitre XII) indépendante de la possibilité d’une décomposition des idéaux en produit d’idéaux maximaux. Comme cet article est écrit dans le style des mathématiques constructives à la Bishop, nous donnerons la version constructive précise que nous choisissons pour beaucoup de notions classiques, même très bien connues.

1. Algèbres de présentation finie sur un corps discret

Le « tour de force » qui est réalisé par l’adjonction de pgcds idéaux en théorie des nombres peut-il être généralisé de manière significative ?

Oui, pour certains anneaux intégralement clos, que nous appelons les *anneaux à diviseurs*, dénommés « anneaux pseudo-prüferiens » dans les exercices de Bourbaki, et « Prüfer v -multiplication domains » dans la littérature anglaise. Ils constituent une classe d’anneaux suffisamment large pour lesquels on a une notion raisonnable de diviseurs, mais où l’on ne réclame pas l’existence de diviseurs irréductibles.

La théorie correspondante en mathématiques classiques semble due principalement à Lorenzen, Jaffard, Lucius et Aubert ([2, 15, 19, 20, 21]).

Un développement moderne récent de cette théorie se trouve dans [14].

Cette théorie généralise la théorie plus classique des anneaux dits de Krull, dans laquelle on réclame une décomposition unique en facteurs premiers pour les diviseurs. Elle a été élaborée notamment par Krull, Arnold (1929), van der Waerden (1929), Prüfer (1932) et Clifford (1938) ([1, 6, 17, 24, 26]). Il semble aussi que l’approche de [4] ait eu une forte influence sur les exposés ultérieurs de la théorie.

En pratique les anneaux à diviseurs sont au départ des anneaux à pgcd intègres ou des domaines de Prüfer. Ensuite la classe des anneaux à diviseurs est stable par extensions polynomiales ou entières et intégralement closes, ce qui donne les exemples usuels de la littérature.

Voici un bref résumé de l’article.

Dans la section 1 nous donnons une version élémentaire et constructive des bases de la théorie des anneaux à diviseurs. Nous donnons des caractérisations simples des anneaux à diviseurs (théorèmes 1.5, 1.28 et 1.29). Nous démontrons qu’un anneau intègre cohérent est à diviseurs si, et seulement si, il est intégralement clos (théorème 1.18). Nous démontrons que les anneaux à diviseurs de dimension de Krull ≤ 1 sont les domaines de Prüfer de dimension de Krull ≤ 1 (théorème 1.19). Nous donnons en 1.27 un principe local-global concret pour la divisibilité, les anneaux intégralement clos et les anneaux à diviseurs.

Dans la section 2 nous abordons les questions de décomposition des diviseurs. Nous expliquons notamment les groupes réticulés de dimension 1 et leurs propriétés de base.

Dans la section 3 nous donnons les propriétés de stabilité essentielles pour les anneaux à diviseurs : localisation, anneaux de polynômes, clôture intégrale dans une extension algébrique du corps de fractions.

Dans la section 4 nous donnons un traitement élémentaire et constructif des anneaux de Krull (les anneaux dont les diviseurs forment un groupe réticulé à décomposition bornée). Nous indiquons l’algorithme de décomposition partielle pour les familles finies de diviseurs, nous démontrons un théorème d’approximation simultanée, le théorème « un et demi » pour les anneaux de Krull, et le théorème caractérisant les anneaux de Krull qui ne possèdent qu’un nombre fini de diviseurs irréductibles.

La question des diviseurs irréductibles est traitée pour l’essentiel dans les énoncés 1.13, 1.14, 1.15 et 1.23, puis précisée en 2.5, 2.11, 3.5, 4.12 et 4.13.

Nous terminons cette introduction par quelques explications concernant notre terminologie. Dans la littérature anglaise nos « anneaux à diviseurs » sont généralement appelés des « Prüfer v -multiplication domain », abrégé en PvMD. Ce n’est vraiment pas très élégant. Ils ont été introduits en 1967 par M. Griffin dans [13] initialement sous le nom de *v -multiplication rings*. Lucius les appelle des *anneaux avec une théorie des pgcds de type fini* dans [20]. Dans les exercices de Bourbaki, *Algèbre Commutative, Diviseurs*, leur nom est *anneau pseudo-prüferien*. Pour plus de renseignements sur la littérature existante voir [5, 9, 10, 11].

Nous aurions voulu appeler ces anneaux *anneaux divisoriels*. Mais dans la littérature anglaise on trouve « divisorial ring » pour un anneau intègre dont tous les idéaux sont « divisoriels » au sens de Bourbaki, c’est-à-dire intersections d’idéaux fractionnaires principaux. Cette

définition n'est pas pertinente d'un point de vue constructif, car il est impossible de montrer constructivement que l'anneau \mathbb{Z} la satisfait². Néanmoins, nous avons considéré que le terme « anneau divisoriel », que nous convoitions, était déjà pris, et nous nous sommes rabattus sur le moins élégant « anneau à diviseurs ».

Signalons aussi que nous introduisons la notion purement multiplicative de liste divisoriellement inversible page 4 dans la section 1. La notion associée d'idéal divisoriellement inversible dans un anneau intègre coïncide avec celle d'idéal t -inversible, définie dans la littérature sur les PvMD. Nous pensons cependant que la terminologie divisoriellement inversible est plus parlante.

Enfin nous définissons page 18 l'anneau de Nagata divisoriel $\mathbf{B}_{\text{div}}(\underline{X})$ d'un anneau commutatif arbitraire \mathbf{B} . Dans le cas d'un anneau intègre, il est appelé dans la littérature *l'anneau de Nagata pour la star opération v* , et il est noté $\text{Na}(\mathbf{B}, v)(\underline{X})$.

1 Anneaux à diviseurs

Dans tout l'article, \mathbf{A} est un anneau intègre, de corps de fractions \mathbf{K} , et l'on note $\mathbf{A}^* = \text{Reg } \mathbf{A}$ (le monoïde des éléments réguliers) et \mathbf{A}^\times le groupe des unités.

Nous définissons un anneau intègre comme un anneau qui satisfait l'axiome « tout élément est nul ou régulier ». Nous n'excluons donc pas a priori le cas de l'anneau trivial. Dans ce cas $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ et l'anneau total des fractions \mathbf{K} est également trivial. Pour qualifier un élément de \mathbf{A}^* , nous parlerons donc plutôt d'élément régulier que d'élément non nul.

Notez que l'anneau \mathbf{K} vérifie l'axiome « tout élément est nul ou inversible », que \mathbf{A} soit trivial ou non.

Dans la suite, nous parlerons de $\mathbf{A}^*/\mathbf{A}^\times$ comme du *monoïde de divisibilité de \mathbf{A}* , et de $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$ comme du *groupe de divisibilité de \mathbf{A}* . Le premier est vu avec sa structure ordonnée de monoïde positif³ et le second, isomorphe au symétrisé du premier, est vu comme un groupe ordonné (ses éléments ≥ 0 sont les classes des éléments de \mathbf{A}^*).

Nous désignons par $\text{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ la profondeur de $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, (abréviation pour la profondeur du \mathbf{A} -module \mathbf{A} relativement à l'idéal \mathfrak{a}). Pour cet article nous suffira de rappeler les définitions suivantes : une liste $(\underline{a}) = (a_1, \dots, a_n)$ est dite de profondeur ≥ 1 si les égalités $a_1x = \dots = a_nx = 0$ impliquent $x = 0$. La liste (\underline{a}) est dite de profondeur ≥ 2 si en outre, toute liste (x_1, \dots, x_n) proportionnelle (i.e. $a_ix_j = a_jx_i$ pour tous i, j) est multiple de (\underline{a}) (i.e. il existe x tel que $x_j = xa_j$ pour tout j). Ces propriétés sont attachées à l'idéal \mathfrak{a} : on peut changer de système générateur pour l'idéal.

Rappelons aussi les résultats classiques suivants (nous les utilisons pour $k = 1$ ou 2) : si $\text{Gr}(\mathfrak{a}) \geq k$ et $\text{Gr}(\mathfrak{b}) \geq k$ alors $\text{Gr}(\mathfrak{ab}) \geq k$; si $\text{Gr}(\mathfrak{a}) \geq k$ et $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ alors $\text{Gr}(\mathfrak{b}) \geq k$; si $\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) \geq k$ alors pour tout m , $\text{Gr}(a_1^m, \dots, a_n^m) \geq k$.

Pgcd fort, ppcm et profondeur ≥ 2

On sait que dans un anneau intègre, deux éléments qui admettent un pgcd n'admettent pas nécessairement un ppcm, bien que la réciproque soit valable. Voici des précisions sur ce sujet.

Proposition et définition 1.1 (Pgcd fort, ppcm et profondeur ≥ 2)

Soient \mathbf{A} un anneau intègre, et $a_1, \dots, a_n, b, g \in \mathbf{A}^*$.

2. Une mésaventure analogue arrive avec la définition usuelle de la noethérianité : tout idéal est de type fini.

3. On définit un *monoïde positif* comme un monoïde commutatif simplifiable $(M, +, 0)$ pour lequel est satisfaite l'implication $x + y = 0 \implies x = y = 0$. Le monoïde M peut alors être vu comme la partie positive d'un groupe ordonné G (en tant que groupe, G est le symétrisé de M .)

1. On dit que la famille (a_i) admet l'élément g comme pgcd fort si sont satisfaites les conditions équivalentes suivantes.
 - (a) L'élément g vu dans $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$ est le pgcd (la borne inférieure) de la liste (a_1, \dots, a_n) .
 - (b) Pour tout $x \in \mathbf{A}^*$ l'élément xg est un pgcd dans \mathbf{A} de (xa_1, \dots, xa_n) .
 - (c) Étant donné un multiple commun a des a_i dans \mathbf{A}^* , l'élément a/g est un ppcm des a/a_i (autrement dit $\frac{a}{g} \mathbf{A} = \bigcap_{i=1}^n \frac{a}{a_i} \mathbf{A}$)
 - (d) (Formulation avec des idéaux fractionnaires dans \mathbf{K}) L'élément $1/g$ est un ppcm des $1/a_i$ dans \mathbf{K} , autrement dit $\frac{1}{g} \mathbf{A} = \bigcap_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \mathbf{A}$.
2. Si g est le pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) , c'est aussi le pgcd fort de n'importe quel autre système générateur de l'idéal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. On dira donc que g est le pgcd fort de l'idéal de type fini \mathfrak{a} .
3. Si g est le pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) , bg est le pgcd fort de (ba_1, \dots, ba_n) .
4. On a $\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) \geq 2$ si, et seulement si, 1 est pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) .

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur. □

Naturellement, un pgcd fort est un pgcd.

Remarque. Soit \mathbf{A} un anneau intègre de corps de fractions \mathbf{K} . Pour deux sous- \mathbf{A} -modules non nuls \mathfrak{a} et $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{K}$, on note $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\mathbf{K}} = \{x \in \mathbf{K} \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$. Dans la terminologie des star-opérations, on note $\mathfrak{a}^{-1} = (\mathbf{A} : \mathfrak{a})_{\mathbf{K}}$. Alors $\mathfrak{a} \mapsto (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ est une star-opération, généralement appelée v -opération, et $\mathfrak{a}^v = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ est l'intersection des idéaux fractionnaires principaux (non nuls) qui contiennent \mathfrak{a} .

Avec ces notations, les propriétés équivalentes du point 1 ci-dessus sont aussi équivalentes à $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{-1} = \langle \frac{1}{g} \rangle$ ou à $(\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{-1})^{-1} = \langle g \rangle$. Lorsque l'anneau est cohérent et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de type fini comme \mathbf{A} -modules, $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\mathbf{K}}$ et $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ sont de type fini. ■

Idéaux divisoriellement inversibles

Définition 1.2 Une liste $(\underline{a}) = (a_1, \dots, a_n)$ dans \mathbf{A}^* est dite divisoriellement inversible si l'on a une liste $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_m)$ dans \mathbf{A}^* telle que la famille $(a_i b_j)_{i \in [1..n], j \in [1..m]}$ admet un pgcd fort g dans \mathbf{A}^* .

Les deux listes (\underline{a}) et (\underline{b}) sont dites inverses divisorielles l'une de l'autre.

Exemples.

- 1) Dans un anneau à pgcd, les pgcds sont forts et toute famille finie admet la liste (1) comme inverse divisorielle.
- 2) Si $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle g \rangle$ avec $g \in \mathbf{A}^*$, la liste (\underline{a}) admet la liste (\underline{b}) comme inverse divisorielle et g est le pgcd fort des $a_i b_j$. ■

En notant $\mathfrak{a} = \langle \underline{a} \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle \underline{b} \rangle$, cette propriété des listes (\underline{a}) et (\underline{b}) ne dépend que de l'idéal \mathfrak{ab} . Et donc la propriété pour la liste (\underline{a}) d'être divisoriellement inversible ne dépend que de l'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \langle \underline{a} \rangle$. Ceci introduit une nouvelle définition.

Définition 1.3 Soit \mathbf{A} un anneau intègre.

- Un idéal de type fini \mathfrak{a} de \mathbf{A} est dit divisoriellement inversible s'il existe un idéal de type fini \mathfrak{b} tel que \mathfrak{ab} admette un pgcd fort. On dit aussi que l'idéal de type fini \mathfrak{a} et l'idéal de type fini \mathfrak{b} sont inverses divisoriels l'un de l'autre.
- L'anneau \mathbf{A} est appelé un anneau à diviseurs si tout idéal de type fini non nul est divisoriellement inversible.

Notez que l'inverse divisoriel d'un idéal de type fini, s'il existe, n'est en aucun cas unique. Il s'agit un peu du même flottage que lorsque l'on parle de l'inverse d'un idéal de type fini dans un anneau de Prüfer. Mais ici, ce sera encore plus flottant, car deux inverses divisoriels d'un même idéal de type fini sont rarement isomorphes comme \mathbf{A} -modules. Par exemple dans un anneau à diviseurs si $\text{Gr}(\mathfrak{c}) \geq 2$ et si $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ admet un pgcd fort g , alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ admet le même pgcd fort. Mais si \mathbf{A} n'est pas un anneau de Prüfer, en général, \mathfrak{b} et $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ne sont pas des \mathbf{A} -modules isomorphes.

Remarque. La notion de liste divisoriellement inversible est une notion purement multiplicative qui peut être définie pour un anneau commutatif arbitraire en utilisant la caractérisation dans le point 4. de la proposition 1.1. La notion associée d'idéal divisoriellement inversible dans un anneau intègre coïncide avec celle d'idéal t -inversible, définie dans la littérature sur les PvMD. Nous pensons cependant que la terminologie divisoriellement inversible est plus parlante. ■

Lemme 1.4 *Soit (a_1, \dots, a_n) une liste divisoriellement inversible dans \mathbf{A}^* et x régulier dans l'idéal $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.*

1. *On peut trouver une liste $(c_1, \dots, c_q) = (\underline{c})$ tel que x soit le pgcd fort des $a_i c_k$.*
2. *Si l'anneau \mathbf{A} est cohérent, on peut prendre pour (c_1, \dots, c_q) un système générateur de l'idéal transporteur $\langle x \rangle : \mathfrak{a}$.*

Démonstration. 1. Considérons une liste (b_1, \dots, b_m) pour laquelle les $a_i b_j$ admettent un pgcd fort g . Dans $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$, g est le pgcd de la famille $(a_i b_j)_{i,j}$, donc $x = \frac{x}{g} g$ est le pgcd de la famille $(\frac{x a_i b_j}{g})_{i,j}$. Comme les $\frac{a_i b_j}{g}$ sont dans \mathbf{A} et x est combinaison linéaire des a_i , on a $\frac{x b_j}{g} \in \mathbf{A}$ et on peut prendre pour (\underline{c}) la liste des $\frac{x b_j}{g}$.

2. Lorsque \mathbf{A} est cohérent, le transporteur $\mathfrak{c}' = \langle x \rangle : \mathfrak{a}$ est un idéal de type fini qui contient l'idéal $\mathfrak{c} = \langle \frac{x b_j}{g}, j \in \llbracket 1..m \rrbracket \rangle$ construit au point 1. On doit vérifier que $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'$ admet aussi x pour pgcd fort. Et puisque $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{c}'$ il suffit que x divise tous les générateurs de $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'$, ce qui est clair. □

Un projet pour le groupe des diviseurs d'un anneau intègre

Comme nous l'avons déjà souligné, du point de vue algorithmique la factorisation totale n'est pas une propriété « facile », et nous sommes surtout intéressés par le fait d'avoir un bon groupe réticulé construit de manière raisonnable à partir du monoïde positif $\mathbf{A}^*/\mathbf{A}^\times$ (ou du groupe ordonné $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$).

Une manière d'expliquer ce que l'on veut réaliser est de décrire formellement les propriétés du groupe des diviseurs de \mathbf{A} , que nous noterons $\text{Div } \mathbf{A}$, et de l'application $\text{div}_{\mathbf{A}}$ de \mathbf{A}^* dans $(\text{Div } \mathbf{A})^+$, qui à tout élément de \mathbf{A}^* associe le *diviseur principal (positif ou nul)* qu'il définit. Nous utilisons une notation additive pour le groupe $\text{Div } \mathbf{A}$. Nous nous inspirons ici de la présentation de la théorie des diviseurs donnée dans le livre [4] consacré à la théorie des nombres.

Mais comme le suggère [2, Aubert], nous ne mentionnerons ici que la structure multiplicative de \mathbf{A}^* : l'addition dans \mathbf{A} ne doit pas intervenir ici ! Voir cependant la proposition 1.8.

Projet divisoriel 1. *Les propriétés requises pour $\boxed{\text{div}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^* \rightarrow (\text{Div } \mathbf{A})^+}$ sont les suivantes.*

D₁ $\text{Div } \mathbf{A}$ est un groupe réticulé et $\text{div}_{\mathbf{A}}$ un morphisme de monoïdes :

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(1) = 0, \quad \text{div}_{\mathbf{A}}(ab) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a) + \text{div}_{\mathbf{A}}(b).$$

D₂ Pour tous $a, b \in \mathbf{A}^*$, $\text{div}_{\mathbf{A}}(a) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(b) \iff a \mid b$.

D_3 Tout élément de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ est la borne inférieure dans $\text{Div } \mathbf{A}$ d'une famille finie d'éléments de $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^*)$.

On peut écrire ce projet sous la forme équivalente suivante, en demandant de traiter tous les diviseurs principaux, y compris ceux qui proviennent de \mathbf{K}^* .

Projet divisoriel 2. Les propriétés requises pour $\boxed{\text{div}_{\mathbf{A}} : \mathbf{K}^* \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}}$ sont les suivantes.

D'_1 $\text{Div } \mathbf{A}$ est un groupe réticulé et $\text{div}_{\mathbf{A}}$ passe au quotient $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$ en donnant un morphisme de groupes ordonnés.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbf{K}^* : \text{div}_{\mathbf{A}}(xy) &= \text{div}_{\mathbf{A}}(x) + \text{div}_{\mathbf{A}}(y), \\ \text{div}_{\mathbf{A}}(1) &= 0, \quad \forall a \in \mathbf{A}^* : \text{div}_{\mathbf{A}}(a) \geq 0. \end{aligned}$$

D'_2 Pour tout $x \in \mathbf{K}^*$, $\text{div}_{\mathbf{A}}(x) \geq 0 \iff x \in \mathbf{A}$.

D'_3 Tout élément de $\text{Div } \mathbf{A}$ est la borne inférieure dans $\text{Div } \mathbf{A}$ d'une famille finie d'éléments de $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathbf{K}^*)$.

Dans la suite nous utiliserons parfois « div » au lieu de « $\text{div}_{\mathbf{A}}$ » lorsque le contexte sera clair.

Remarque. La condition D_3 implique la propriété qu'un élément de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ est égal à la borne inférieure dans $\text{Div } \mathbf{A}$ de tous les éléments de $\text{div}(\mathbf{A}^*)$ qui le majorent. Nous utiliserons souvent cette propriété par la suite.

Mais naturellement la condition D_3 est a priori plus forte.

Dans [4] c'est une propriété encore plus faible qui est énoncée : deux éléments de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ qui ont les mêmes majorants dans $\text{div}(\mathbf{A}^*)$ sont égaux. Par contre ces auteurs introduisent deux conditions supplémentaires.

D'une part ils demandent que $\text{div}_{\mathbf{A}}(a+b) \geq \text{div}_{\mathbf{A}}(a) \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(b)$ (propriété non multiplicative). D'autre part ils demandent à $\text{Div } \mathbf{A}$ d'être un groupe réticulé à décomposition complète. ■

Convention. Il peut être pratique de rajouter⁴ un élément $+\infty$ à $\text{Div } \mathbf{A}$ en posant $\text{div}(0) = +\infty$, $+\infty \geq \delta$ et $\delta + \infty = \infty + \delta = +\infty$ pour tout $\delta \in \text{Div } \mathbf{A} \cup \{+\infty\}$.

Alors les propriétés décrites dans le Projet divisoriel restent valables en acceptant 0 là où on le refusait. Cette convention présente deux intérêts. Premièrement, $(\text{Div } \mathbf{A})^+ \cup \{+\infty\}$ est un treillis distributif⁵. Deuxièmement, cela permet de traiter de manière plus uniforme les espaces spectraux implicitement présents dans la théorie. ■

Le théorème de base

Théorème et définition 1.5 (Anneaux à diviseurs)

Pour que le projet divisoriel puisse être réalisé pour l'anneau \mathbf{A} il faut et suffit que \mathbf{A} soit un anneau à diviseurs (toute famille finie non vide de \mathbf{A}^* est divisoriellement inversible).

Dans ce cas le couple $(\text{div}_{\mathbf{A}}, \text{Div } \mathbf{A})$ est unique à isomorphisme unique près.

- On dit alors que \mathbf{A} est un anneau à diviseurs avec $\text{div}_{\mathbf{A}} : \mathbf{K}^* \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}$ pour théorie des diviseurs.
- On note alors $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ pour $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) \wedge \dots \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(a_n)$.
- Un élément $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$ est appelé un diviseur principal s'il est de la forme $\text{div}(x)$ pour un $x \in \mathbf{K}^*$.

4. Lorsque $\mathbf{A} \neq 0$ les conditions requises sont satisfaites avec $+\infty > \text{Div } \mathbf{A}$. Par contre si $\mathbf{A} = 0$, on ne rajoute rien du tout, car $\text{div}(0) = \text{div}(1)$.

5. Lorsque $\mathbf{A} \neq 0$, il manque juste l'élément maximum dans $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ pour en faire un treillis distributif.

Démonstration. Nous laissons à la lectrice le soin de vérifier que les deux projets divisoriels sont équivalents.

Supposons le projet divisoriel réalisé et montrons que toute liste (a_1, \dots, a_n) dans \mathbf{A}^* est divisoriellement inversible. On note $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ pour $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) \wedge \dots \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(a_n)$. On a nécessairement par distributivité

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) + \text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_q) = \text{div}_{\mathbf{A}}((a_i c_j)_{i \in [1..n], j \in [1..q]}).$$

et trivialement $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_q) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_q)$.

On a $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) \geq \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ de sorte que l'on peut écrire (en vertu de D_3)

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) - \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = \text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_q)$$

pour une famille finie $(c_1, \dots, c_q) = (\underline{c})$ dans \mathbf{A}^* . L'égalité

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) + \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{c}) = \text{div}_{\mathbf{A}}((a_i c_j)_{i \in [1..n], j \in [1..q]})$$

nous dit que $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1)$ est la borne inférieure de la famille $(\text{div}_{\mathbf{A}}(a_i c_j))_{i,j}$ dans $\text{Div } \mathbf{A}$. Et vu D'_2 , cela implique que a_1 est la borne inférieure de la famille $(a_i c_j)_{i,j}$ dans $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$. Ce qui signifie que a_1 est pgcd fort des $a_i c_j$ dans \mathbf{A}^* . Ainsi la condition que toute famille finie soit divisoriellement inversible est bien satisfaite.

Voyons maintenant la question de l'unicité.

Les éléments de $\text{Div } \mathbf{A}$ s'écrivent tous nécessairement sous forme $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) - \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b})$ pour deux listes finies $(\underline{a}) = (a_1, \dots, a_n)$ et $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_m)$ dans \mathbf{A}^* . On peut même demander que $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, autrement dit que 1 soit pgcd fort des a_i et b_j dans \mathbf{A}^* .

Pour que l'unicité de la solution du projet divisoriel soit acquise, il suffit de voir qu'on n'a pas le choix pour décider une égalité

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) - \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{c}) - \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{d})$$

pour des listes finies (\underline{a}) , (\underline{b}) , (\underline{c}) , (\underline{d}) de \mathbf{A}^* . Cela revient à $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) + \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{d}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) + \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{c})$.

De manière plus générale on donne une propriété caractéristique pour une égalité

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = \text{div}_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_m).$$

Ici, on peut avancer l'un des deux arguments suivants, au choix.

Premier argument.

Si (c_1, \dots, c_q) est une famille inverse divisorielle de (a_1, \dots, a_n) avec g pgcd fort des $(a_i c_j)$, l'égalité $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b})$ équivaut au fait que g est pgcd fort des $(b_k c_j)$.

Deuxième argument.

On donne une propriété caractéristique pour une inégalité $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b})$. C'est la propriété suivante.

— Dans \mathbf{K}^* , b est multiple de tous les diviseurs communs à (a_1, \dots, a_n) . (*)

En effet, puisqu'on doit avoir $\text{div}_{\mathbf{A}}(1/x) = -\text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ en raison de D'_1 , la condition D'_3 est équivalente à sa formulation duale : tout élément de $\text{Div } \mathbf{A}$ est la borne supérieure dans $\text{Div } \mathbf{A}$ d'une famille finie d'éléments de $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathbf{K}^*)$, et a fortiori il est la borne supérieure de l'ensemble des $\text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ qu'il majore.

En particulier

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) \geq \alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) \iff \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) \text{ majore } M_\alpha = \{ \text{div}_{\mathbf{A}}(x) \mid x \in \mathbf{K}^*, \text{div}_{\mathbf{A}}(x) \leq \alpha \}.$$

Et M_α est égal à $\{ \text{div}_{\mathbf{A}}(x) \mid x \in \mathbf{K}^*, \&_i x \mid a_i \}$. Et vu D_2 , $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) \geq \alpha$ signifie exactement que dans \mathbf{K}^* , b est multiple des diviseurs communs à la liste (\underline{a}) .

Supposons maintenant la condition d'existence des inverses divisoriels satisfaite et montrons que l'on peut construire $\text{Div } \mathbf{A}$ et $\text{div}_{\mathbf{A}}$ conformément au projet divisoriel.

Pour cela on munit l'ensemble $\text{Lst}(\mathbf{A})^*$ (ensemble des listes finies non vides d'éléments de \mathbf{A}^*) de la relation de préordre \preceq directement inspirée de la condition (*) précédente :

$$(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_m) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{chaque } b_j \text{ est multiple des diviseurs communs à } (\underline{a}).$$

On définit $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ comme l'ensemble ordonné correspondant (où $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \preceq \beta$ et $\beta \preceq \alpha$). On vérifie alors que l'on peut définir une addition sur $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ en posant

$$(\underline{a}) + (\underline{b}) \stackrel{\text{def}}{=} (a_i b_j)_{i,j}.$$

En d'autres termes cette loi a priori mal définie « passe au quotient ». On vérifie ensuite que l'on obtient par symétrisation un groupe réticulé $\text{Div } \mathbf{A}$ convenable. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Le résultat dans le lemme qui suit est donné page 388 dans [27, Zafrullah, 2006] : il faut lire « PvMD » au lieu de « anneau à diviseurs » et « t -inversible » au lieu de « divisoriellement inversible ».

Lemme 1.6 *Un anneau intègre dans lequel tout idéal fidèle à deux générateurs est divisoriellement inversible est un anneau à diviseurs.*

Démonstration. On utilise l'astuce de Dedekind. Pour 3 idéaux arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dans un anneau on a toujours l'égalité

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac}).$$

En outre un produit d'idéaux divisoriellement inversibles est divisoriellement inversible. Donc si $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ et $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ sont divisoriellement inversibles, il en va de même pour $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Cela permet de passer des idéaux à deux générateurs aux idéaux à trois générateurs, puis de proche en proche à un nombre quelconque de générateurs. \square

Exemples. On a deux exemples fondamentaux, à partir desquels seront construits la plupart des autres exemples intéressants en pratique.

1) Un anneau intègre à pgcd \mathbf{A} est à diviseurs et l'on a

$$(\text{Div } \mathbf{A}, +, 0, \leq) \simeq (\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times, \cdot, \bar{1}, |).$$

En outre un inverse divisoriel de n'importe quel idéal de type fini est $\langle 1 \rangle$.

Un anneau à diviseurs dont tous les diviseurs sont principaux est un anneau à pgcd.

2) Un domaine de Prüfer est un anneau à diviseurs et l'on a

$$(\text{Div } \mathbf{A}, +, 0, \leq, \wedge) \simeq (\text{Gfr}(\mathbf{A}), \cdot, \langle 1 \rangle, \supseteq, +).$$

(rappelons que $\text{Gfr}(\mathbf{B})$ désigne en général le groupe des idéaux fractionnaires inversibles de \mathbf{B} : pour un domaine de Prüfer ce sont tous les idéaux fractionnaires de type fini fidèles). En outre un idéal de type fini fidèle⁶ admet un inverse (au sens des idéaux inversibles) qui est aussi un inverse divisoriel.

3) On donne souvent comme premier exemple d'un anneau de Prüfer qui n'est pas un anneau de Bezout l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ où $\alpha = \sqrt{-5}$ dans lequel on a $2 \times 3 = (1 + \alpha)(1 - \alpha)$ avec les 4 éléments irréductibles. Le mystère de la décomposition unique en facteurs premiers est alors éclairci par les décompositions en produits d'idéaux premiers données par les égalités

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle &= \langle 2, 1 + \alpha \rangle^2, & \langle 3 \rangle &= \langle 3, 1 + \alpha \rangle \langle 3, 1 - \alpha \rangle, \\ \langle 1 + \alpha \rangle &= \langle 2, 1 + \alpha \rangle \langle 3, 1 + \alpha \rangle & \text{et} & \quad \langle 1 - \alpha \rangle = \langle 2, 1 + \alpha \rangle \langle 3, 1 - \alpha \rangle. \end{aligned}$$

avec les trois idéaux $\langle 2, 1 + \alpha \rangle$, $\langle 3, 1 + \alpha \rangle$, $\langle 3, 1 - \alpha \rangle$ irréductibles distincts.

Voici un exemple du même style avec un anneau à diviseurs qui n'est ni un anneau à pgcd ni un domaine de Prüfer. On considère un corps discret \mathbf{k} et l'on définit

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[A, B, C, D]/\langle AD - BC \rangle = \mathbf{k}[a, b, c, d].$$

Il s'agit d'un anneau intègre dans lequel a, b, c, d sont des éléments irréductibles. En effet l'anneau quotient \mathbf{A} reste gradué et a, b, c, d sont de degré 1. La suite (a, d) est régulière et

6. Si \mathbf{A} est un anneau intègre non trivial, un idéal de type fini est fidèle si, et seulement si, il est non nul.

les localisés en a et d sont des anneaux à pgcd. Par exemple $\mathbf{A}[\frac{1}{a}] \simeq \mathbf{k}[A, B, C, 1/A]$. Donc \mathbf{A} est un anneau à diviseurs (principe local-global 1.27). En outre $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, d) = 0$ car l'égalité a lieu dans les deux localisés (principe local-global 1.27).

On vérifie que $\langle b, a \rangle \langle b, d \rangle = \langle b \rangle \langle a, b, c, d \rangle$, donc $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b, a) + \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b, d) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b)$ car $\operatorname{div}(a, b, c, d) = 0$.

Donc l'égalité $ad = bc$ sans décomposition unique apparente en facteurs premiers s'explique par les décompositions en sommes de diviseurs deux à deux orthogonaux dans $\operatorname{Div} \mathbf{A}$ données par les égalités

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a) &= \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, b) + \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, c) \quad , \quad \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, b) + \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, c) \quad , \\ \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b) &= \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, b) + \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, b) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(c) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, c) + \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, c). \end{aligned}$$

Notons qu'il est un peu plus délicat de certifier que les quatre diviseurs $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, b)$, $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, c)$, $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, b)$ et $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(d, c)$ sont irréductibles. Voir à ce sujet la poursuite de cet exemple pages 11 et 13.

Enfin l'élément a est irréductible mais il n'est pas premier car $\mathbf{A}/\langle a \rangle \simeq \mathbf{k}[B, C, D]/\langle BC \rangle$. Donc \mathbf{A} n'est pas un anneau à pgcd⁷.

Et l'anneau \mathbf{A} n'est pas non plus un domaine de Prüfer car l'égalité $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a, d) = 0$ impliquerait $\langle a, d \rangle = \langle 1 \rangle$, ce qui n'est pas le cas⁸. ■

Proposition 1.7 *Lorsque \mathbf{A} est un anneau à diviseurs avec $\operatorname{div}_{\mathbf{A}} : \mathbf{K}^* \rightarrow \operatorname{Div} \mathbf{A}$ comme théorie des diviseurs, on a les propriétés suivantes.*

1. Pour b, a_1, \dots, a_n dans \mathbf{A}^* ,
 - (a) $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b) \leq \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ si, et seulement si, b divise les a_i dans \mathbf{A}^* ,
 - (b) $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b) \geq \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ si, et seulement si, b est multiple de tous les diviseurs communs à (a_1, \dots, a_n) dans \mathbf{K}^* ,
 - (c) $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(b) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ si, et seulement si, b est pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) .
2. Soit α un élément arbitraire de $\operatorname{Div} \mathbf{A}$.
 - (a) α est la borne inférieure d'une famille finie de diviseurs principaux (en conséquence il est la borne inférieure des diviseurs principaux qu'il minore).
 - (b) α est la borne supérieure d'une famille finie de diviseurs principaux (en conséquence il est la borne supérieure des diviseurs principaux qu'il majore).
 - (c) On peut écrire α sous la forme $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) - \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b})$ pour deux listes finies (\underline{a}) et (\underline{b}) dans \mathbf{A}^* avec $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ (autrement dit 1 est pgcd fort des a_i et b_j dans \mathbf{A}^*).
3. On considère deux listes $(\underline{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ et $(\underline{y}) = (y_1, \dots, y_m)$ dans \mathbf{K}^*
 - (a) On a l'égalité $\bigwedge_i \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(x_i) = \bigwedge_j \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(y_j)$ si, et seulement si, (\underline{x}) et (\underline{y}) ont les mêmes diviseurs communs dans \mathbf{K}^* .
 - (b) On a l'égalité $\bigvee_i \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(x_i) = \bigvee_j \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(y_j)$ si, et seulement si, (\underline{x}) et (\underline{y}) ont les mêmes multiples communs dans \mathbf{K}^* .

Démonstration. Tout ceci résulte des considérations développées dans la démonstration du théorème 1.5. □

On a alors comme corollaire une propriété faisant intervenir (enfin) la structure additive de l'anneau.

7. Autre argument : le couple (a, b) a pour pgcd 1, mais ce n'est pas un pgcd fort car ad est multiple de a et b sans être multiple de ab (sinon d serait multiple de b).

8. Un argument plus savant : \mathbf{A} étant noethérien cohérent, il serait de dimension ≤ 1 (théorème XII-7.8 dans [18]), or il contient la suite régulière $(a, d, b + c)$.

Proposition et définition 1.8 *On suppose que \mathbf{A} est un anneau à diviseurs.*

1. Pour tous $a, b \in \mathbf{A}^*$ on a $\text{div}_{\mathbf{A}}(a) \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(b) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(a + b)$.
2. Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A}$ et $a \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, on a

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1) \wedge \dots \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(a_n) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(a).$$

En notant $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ on voit que le diviseur $\alpha = \bigwedge_i \text{div}_{\mathbf{A}}(a_i)$ ne dépend que de \mathfrak{a} .
On note donc $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$.
On dit que α est le diviseur de l'idéal de type fini \mathfrak{a} .

3. Pour deux idéaux de type fini \mathfrak{a} et \mathfrak{b} de \mathbf{A} on a alors

$$\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \Rightarrow \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) + \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}).$$

Démonstration. 1. En effet les diviseurs communs à (a, b) dans $\mathbf{K}^*/\mathbf{A}^\times$ sont les mêmes que les diviseurs communs à $(a, b, a + b)$.

Vu la proposition 1.7 on a donc $\text{div}(a) \wedge \text{div}(b) = \text{div}(a) \wedge \text{div}(b) \wedge \text{div}(a + b)$.

2. Même chose.

3. Par distributivité dans le groupe réticulé $\text{Div } \mathbf{A}$. □

On peut généraliser la proposition 1.8 aux idéaux fractionnaires de type fini de \mathbf{A} . On a alors les implications suivantes ($x \in \mathbf{K}$, $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}$ idéaux fractionnaires de type fini $\subseteq \mathbf{K}$) :

$$x \in \mathfrak{r} \implies \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{r}) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(x), \quad \mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{y} \implies \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{r}) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{y}).$$

Notez que pour $\mathfrak{r} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ l'inégalité $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{r}) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ signifie que

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \text{div}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n, x) \text{ i.e. } \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{r}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{r} + \langle x \rangle).$$

Cela signifie aussi que tout $y \in \mathbf{K}$ qui divise les x_i divise x ⁹.

Exprimer un diviseur comme borne supérieure de diviseurs principaux

Proposition et notation 1.9 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs.*

1. Un diviseur ≥ 0 s'écrit $\alpha = \text{div}(\mathfrak{a})$ pour un idéal de type fini \mathfrak{a} . Pour exprimer α comme borne supérieure de diviseurs principaux on considère un inverse divisoriel $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ de l'idéal \mathfrak{a} . On a donc $\alpha + \beta = \text{div}(g)$ ($\beta = \text{div}(\mathfrak{b})$) pour un $g \in \mathbf{A}^*$. D'où finalement

$$\alpha = \bigvee_{j=1}^m \text{div}\left(\frac{g}{b_j}\right) = \bigvee_{j=1}^m \text{div}(a_j) \text{ pour des } a_j \in \mathbf{K}^*.$$

2. De la même manière, un élément arbitraire de $\text{Div } \mathbf{A}$ peut s'écrire sous forme $\alpha - \text{div}(\mathfrak{b})$ pour un $\alpha \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$ et un $\mathfrak{b} \in \mathbf{A}^*$. Il s'écrit donc explicitement comme une borne supérieure finie de diviseurs principaux.
3. Si $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$ s'écrit $\bigvee_{j=1}^m \text{div}(a_j)$, on a pour $x \in \mathbf{K}$:

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(x) \geq \alpha \iff x \in \bigcap_i a_i \mathbf{A}.$$

On note $\text{Idv}_{\mathbf{A}}(\alpha)$ ou $\text{Idv}(\alpha)$ cet idéal fractionnaire

$$\text{Idv}(\alpha) = \{x \in \mathbf{K} \mid \text{div}_{\mathbf{A}}(x) \geq \alpha\} = \bigcap_i a_i \mathbf{A}.$$

Enfin pour un idéal fractionnaire $\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{A}$, on note de manière abrégée $\text{Idv}(\mathfrak{c})$ ou $\text{Idv}(c_1, \dots, c_q)$ au lieu de $\text{Idv}(\text{div}(\mathfrak{c}))$.

9. Pour x et les x_i dans \mathbf{A} c'est une condition du type « pgcd fort » : pour tout $z \in \mathbf{A}$ et $c \in \mathbf{A}^*$, si z divise les cx_i , alors z divise cx .

4. Pour α et $\gamma \in \text{Div } \mathbf{A}$ on a $\alpha \leq \gamma$ si, et seulement si, $\text{Idv}(\alpha) \supseteq \text{Idv}(\gamma)$ dans \mathbf{K} .
En particulier $\alpha = \gamma$ si, et seulement si, $\text{Idv}(\alpha) = \text{Idv}(\gamma)$.
5. Dans le cas de figure du point 1., on a $\text{Idv}(\alpha) = \mathbf{A} \cap \bigcap_j \frac{g}{b_j} \mathbf{A} = (g : \mathbf{b})_{\mathbf{A}}$.
6. Si $\text{Idv}(\alpha) = \bigcap_i a_i \mathbf{A} = \sum_{h=1}^m c_h \mathbf{A}$, alors $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_m)$.
Ainsi lorsque \mathbf{A} est cohérent, l'idéal fractionnaire $\text{Idv}(\alpha)$ est de type fini pour tout diviseur α .

Démonstration. 1 et 2. Clair.

3. De manière générale un diviseur est borne inférieure des diviseurs principaux qui le majorent. Or dire que $\text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ majore les $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_j)$, autrement dit qu'il majore leur borne supérieure α , c'est dire que $x \in \bigcap_i a_i \mathbf{A}$.

4 et 5. Clair d'après 3.

6. Posons $\gamma = \text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_m)$. Un diviseur principal $\text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ majore α si, et seulement si, $x \in \bigcap_i a_i \mathbf{A}$. Ainsi $\gamma \geq \alpha$, et par ailleurs tout diviseur principal qui majore α majore γ . Donc $\gamma = \alpha$ car ils sont majorés par les mêmes diviseurs principaux. \square

Exemple. Avec l'exemple 3) page 8, puisque $\text{div}_{\mathbf{A}}(a, b) + \text{div}_{\mathbf{A}}(a, c) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a)$, le point 5 ci-dessus nous donne l'égalité $\text{Idv}_{\mathbf{A}}(a, b) = (a : c)_{\mathbf{A}}$. Un calcul montre alors que $(a : c)_{\mathbf{A}} = \langle a, b \rangle$. Et par suite $\langle a, b \rangle = \text{Idv}_{\mathbf{A}}(a, b)$. \blacksquare

En général pour un idéal fractionnaire $\mathfrak{c} = \langle c_1, \dots, c_q \rangle$ on peut avoir une inclusion stricte $\mathfrak{c} \subsetneq \text{Idv}(\mathfrak{c})$ (c'est le cas si $\mathfrak{c} \subsetneq \text{Icl}(\mathfrak{c})$). Lorsque l'anneau est cohérent, les intersections finies d'idéaux fractionnaires principaux sont des idéaux fractionnaires de type fini qui ont donc un statut particulier.

Remarques. 1) Pour un idéal fractionnaire non nul de type fini \mathfrak{a} de l'anneau à diviseurs \mathbf{A} on a $\text{Idv}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$, qui est l'intersection des idéaux fractionnaires principaux contenant \mathfrak{a} . 2) Tout diviseur étant borne supérieure d'une famille finie de diviseurs principaux, on pourrait choisir de représenter les diviseurs par les intersections finies d'idéaux fractionnaires principaux comme « forme canonique ». L'avantage est alors que $\alpha = \beta$ si, et seulement si, $\text{Idv}(\alpha) = \text{Idv}(\beta)$. Notons que cependant dans l'exemple précédent : $\text{div}_{\mathbf{A}}(a, b)$ est > 0 mais il ne peut s'écrire comme borne supérieure d'éléments $\text{div}_{\mathbf{A}}(x_i)$ pour des $x_i \in \mathbf{A}$ car tout diviseur commun de a et b dans \mathbf{A} est une unité. \blacksquare

La proposition 1.9 justifie la définition suivante, et donne le corollaire qui la suit.

Définition et notation 1.10

Soit \mathbf{A} un anneau et $\mathbf{K} = \text{Frac } \mathbf{A}$ son anneau total de fractions.

- On appelle idéal divisoriel fini de \mathbf{A} une intersection finie d'idéaux fractionnaires principaux fidèles dans \mathbf{K} (i.e., de la forme $x\mathbf{A}$ pour un $x \in \mathbf{K}^*$). Si \mathbf{A} est un anneau à diviseurs, un idéal divisoriel fini est n'importe quel idéal fractionnaire de la forme $\text{Idv}(\alpha)$ pour un $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$.
- On note $\text{Idif}(\mathbf{A})$ l'ensemble des idéaux divisoriels finis de \mathbf{A} .
- Pour un idéal fractionnaire \mathfrak{a} qui n'est pas supposé de type fini, on définit $\text{Idv}(\mathfrak{a})$ comme l'intersection des idéaux fractionnaires principaux fidèles qui contiennent \mathfrak{a} . En outre, dans le cas d'un anneau à diviseurs, on écrit $\text{div}(\mathfrak{a}) = \alpha$ si $\text{Idv}(\mathfrak{a}) = \text{Idv}(\alpha)$. Ceci revient à dire que $\mathfrak{a} \subseteq \text{Idv}(\alpha)$ et que $\alpha = \text{div}(\mathfrak{b})$ pour un idéal fractionnaire de type fini $\mathfrak{b} \subseteq \text{Idv}(\mathfrak{a})$.

NB. Un idéal divisoriel fini n'est pas nécessairement un idéal fractionnaire de type fini, mais c'est le cas lorsque \mathbf{A} est cohérent. Par ailleurs, $\text{div}(\mathfrak{a}) = 0$ signifie que \mathfrak{a} contient une suite de profondeur ≥ 2 .

Corollaire 1.11 *Pour un anneau à diviseurs, les applications*

$$\begin{aligned} \text{Idif}(\mathbf{A}) &\longrightarrow \text{Div } \mathbf{A} \quad , \quad \bigcap_i x_i \mathbf{A} \longmapsto \bigvee_i \text{div}_{\mathbf{A}}(x_i) \text{ et} \\ \text{Div } \mathbf{A} &\longrightarrow \text{Idif}(\mathbf{A}) \quad , \quad \alpha \longmapsto \text{Idv}(\alpha) \end{aligned}$$

sont des bijections réciproques bien définies.

Quand le groupe des diviseurs est-il discret ?

Un groupe réticulé G est dit *discret* si la relation d'ordre $\alpha \leq \beta$ est décidable¹⁰. Pour cela il faut et suffit que l'égalité $\gamma = 0$ pour un $\gamma \in G^+$ soit décidable, car $\alpha \leq \beta \iff \alpha - (\alpha \wedge \beta) = 0$. Pour le groupe réticulé $\text{Div } \mathbf{A}$, cela veut dire que l'on sait tester si une liste finie (a_1, \dots, a_n) dans \mathbf{A}^* admet 1 comme pgcd fort.

En fait savoir tester si $\text{div}_{\mathbf{A}}(x) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(y)$ pour x et $y \in \mathbf{K}^*$ revient à savoir tester la divisibilité dans \mathbf{A}^* , et cela va suffire. En effet, pour un anneau à diviseurs \mathbf{A} , on peut tester « $\alpha \leq \beta$? » pour α et β dans $\text{Div } \mathbf{A}$ comme suit. On écrit $\alpha = \bigvee_{i=1}^n \text{div}_{\mathbf{A}}(x_i)$ et $\beta = \bigwedge_{j=1}^m \text{div}_{\mathbf{A}}(y_j)$ pour des x_i et $y_j \in \mathbf{K}^*$.

On doit donc tester $\text{div}_{\mathbf{A}}(x_i) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(y_j)$ pour chaque couple (i, j) . D'où le résultat.

Lemme 1.12 *Pour un anneau à diviseurs \mathbf{A} les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le groupe $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret.*
2. *La divisibilité dans \mathbf{A}^* est décidable (autrement dit \mathbf{A} est une partie détachable de \mathbf{K}).*
On dit aussi dans ce cas que \mathbf{A} est un anneau à divisibilité explicite.

C'est le cas lorsque \mathbf{A} est fortement discret.

Diviseurs irréductibles

Rappelons qu'un élément $\pi > 0$ d'un groupe réticulé G est dit *irréductible* si toute égalité $\pi = \eta + \zeta$ dans G^+ implique $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$. Par ailleurs le « lemme de Gauss » dit que

$$(\xi \perp \eta \text{ et } \xi \leq \eta + \zeta) \implies \xi \leq \zeta.$$

On en déduit le « lemme d'Euclide », qui pour un élément irréductible π et deux éléments η et $\zeta \in G^+$, donne, si G est discret, l'implication,

$$\pi \leq \eta + \zeta \implies \pi \leq \eta \text{ ou } \pi \leq \zeta$$

En langage de divisibilité on dirait « tout élément irréductible est premier ».

Comme dans [ACMC], nous appelons « idéal premier » tout idéal qui donne par passage au quotient un anneau sans diviseur de zéro, c'est-à-dire vérifiant $xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)$. En particulier l'idéal $\langle 1 \rangle$ est premier.

On obtient pour les diviseurs irréductibles les deux théorèmes importants suivants.

Théorème 1.13 *Dans un anneau à diviseurs à divisibilité explicite, un diviseur $\alpha > 0$ est irréductible si, et seulement si, $\text{Idv}(\alpha)$ est un idéal premier.*

On obtient donc une bijection entre les ensembles suivants.

- *Les diviseurs irréductibles.*
- *Les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$.*

10. En mathématiques constructives, la notion de construction (et donc celle de décidabilité) est une notion primitive qui n'est pas susceptible d'une définition en termes de machines de Turing. Voir [7].

Démonstration. Supposons α irréductible et montrons que $\text{Idv}(\alpha)$ est un idéal premier. Si $xy \in \text{Idv}(\alpha)$, on a $\text{div}(x) + \text{div}(y) \geq \alpha$, donc $\text{div}(x) \geq \alpha$ ou $\text{div}(y) \geq \alpha$ (car α est « premier »), c'est-à-dire $x \in \text{Idv}(\alpha)$ ou $y \in \text{Idv}(\alpha)$.

Supposons $\text{Idv}(\alpha)$ premier et $\alpha \leq \beta + \gamma$ avec

$$\beta = \text{div}(b_1, \dots, b_n) \geq 0 \text{ et } \gamma = \text{div}(c_1, \dots, c_q) \geq 0.$$

On montre que $\alpha \leq \beta$ ou $\alpha \leq \gamma$. Ainsi, puisque $\alpha > 0$, il est « premier » et a fortiori irréductible. Comme chaque $b_i c_j$ est dans $\text{Idv}(\alpha)$ (car $\text{div}(b_i c_j) \geq \alpha$), on obtient $b_i \in \text{Idv}(\alpha)$ ou $c_j \in \text{Idv}(\alpha)$. Or par distributivité du « ou » sur le « et » dans le calcul des propositions, on a, en notant P_i pour « $b_i \in \text{Idv}(\alpha)$ » et Q_j pour « $c_j \in \text{Idv}(\alpha)$ »

$$(\&_i P_i) \text{ ou } (\&_j Q_j) = \&_{i,j} (P_i \text{ ou } Q_j).$$

Et si par exemple $\&_i (b_i \in \text{Idv}(\alpha))$, cela donne $\alpha \leq \beta$. □

Exemples. 1) Soit \mathbf{A} un anneau de valuation intègre à divisibilité explicite. C'est un domaine de Bezout pour lequel le groupe $\text{Div } \mathbf{A}$ est totalement ordonné discret et il y a au plus un diviseur irréductible π , qui s'écrit $\pi = \text{div}(p)$ avec $\text{Rad}(\mathbf{A}) = \langle p \rangle = \text{Idv}(\pi)$. Ainsi on a un diviseur irréductible si, et seulement si, $\text{Rad}(\mathbf{A})$ est un idéal principal. S'il y a d'autres idéaux premiers non nuls, c'est-à-dire si le rang du groupe $\text{Div } \mathbf{A}$ est > 1 , ils ne sont pas de la forme $\text{Idv}(\alpha)$. Donc ce ne sont pas des idéaux principaux et ils ne sont pas de type fini.

2) Soit \mathbf{A} un anneau à pgcd. Les diviseurs irréductibles correspondent aux éléments irréductibles de l'anneau (à association près), ou encore aux idéaux premiers principaux non nuls. Si \mathbf{A} est factoriel et si $x \in \mathfrak{p}$ premier ($\neq \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$), un des éléments irréductibles qui divisent x , disons p , doit être dans \mathfrak{p} . Donc si $\mathfrak{p} \neq \langle p \rangle$, il y a au moins deux éléments irréductibles (non associés) dans \mathfrak{p} , ce qui fait une suite de profondeur 2, et $\text{div}(\mathfrak{p}) = 0$. ■

Théorème 1.14 *Dans un anneau à diviseurs à divisibilité explicite non trivial, si \mathfrak{p} est un idéal premier de type fini non nul avec $\pi = \text{div}(\mathfrak{p}) > 0$, alors $\mathfrak{p} = \text{Idv}(\pi)$ et π est un diviseur irréductible.*

Démonstration. D'après le théorème 1.13, il suffit de montrer que $\mathfrak{p} = \text{Idv}(\pi)$, l'inclusion $\mathfrak{p} \subseteq \text{Idv}(\pi)$ étant triviale.

Soit $a \neq 0$ un élément de \mathfrak{p} . D'après le lemme 1.4, il existe deux listes $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_m)$ et $(\underline{c}) = (c_1, \dots, c_q)$ dans \mathbf{A}^* , la deuxième de profondeur ≥ 2 , telles que

$$\mathfrak{p} \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a \rangle \langle c_1, \dots, c_q \rangle \quad (*)$$

Comme $\pi > 0 = \text{div}(c_1, \dots, c_q)$ il y a un c_j tel que $\text{div}(c_j) \not\geq \pi$, et a fortiori $c_j \notin \mathfrak{p}$.

Soit $x \in \text{Idv}(\mathfrak{p}) = (\langle a \rangle : \langle \underline{b} \rangle)$ (point 5 de la proposition 1.9). On a $x \langle \underline{b} \rangle \subseteq \langle a \rangle$, avec (*) cela donne $a\mathfrak{p} \supseteq x\mathfrak{p} \langle \underline{b} \rangle = xa \langle \underline{c} \rangle$, donc $\mathfrak{p} \supseteq x \langle \underline{c} \rangle$. Enfin, comme $xc_j \in \mathfrak{p}$ et $c_j \notin \mathfrak{p}$, on obtient $x \in \mathfrak{p}$. Ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple. Dans l'exemple 3) page 8, les diviseurs $\text{div}(a, b)$, $\text{div}(a, c)$, $\text{div}(d, b)$ et $\text{div}(d, c)$ sont irréductibles car les idéaux $\langle a, b \rangle$, $\langle a, c \rangle$, $\langle d, b \rangle$ et $\langle d, c \rangle$ sont premiers. Comme $\text{div}(a, b) + \text{div}(a, c) = \text{div}(a) > 0$, on a par raison de symétrie $\text{div}(a, b) > 0$ et $\text{div}(a, c) > 0$. On peut appliquer le théorème 1.14. On obtient en outre sans calcul l'égalité $\text{Idv}(a, b) = \langle a, b \rangle$ et les trois autres égalités analogues. ■

Corollaire 1.15 *Dans un anneau à diviseurs cohérent à divisibilité explicite non trivial, on a les propriétés équivalentes suivantes pour un idéal $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle$ arbitraire.*

- L'idéal \mathfrak{q} est premier, de type fini, et $\text{div}(\mathfrak{q}) > 0$.
- L'idéal \mathfrak{q} est premier, de type fini et $\text{div}(\mathfrak{q})$ est irréductible.
- L'idéal \mathfrak{q} est un idéal divisoriel fini premier $\neq \langle 1 \rangle$.

– Il existe un diviseur irréductible π tel que $\mathfrak{q} = \text{Idv}(\pi)$.
Et dans un tel cas \mathfrak{q} est détachable.

En d'autres termes, on obtient une bijection entre les ensembles suivants :
– les diviseurs irréductibles,
– les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$,
et une égalité entre les ensembles suivants :
– les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$,
– les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle$ tels que $\text{div}(\mathfrak{q}) > 0$.
– les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$ tels que $\mathfrak{q} = \text{Idv}(\mathfrak{q})$.

Propriétés de clôture intégrale

On note $\text{Icl}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ la clôture intégrale de \mathfrak{a} dans \mathbf{A} . Quand le contexte est clair, on utilise $\text{Icl}(\mathfrak{a})$.

Théorème 1.16 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs et \mathfrak{a} un idéal de type fini.*

1. *Pour tout x entier sur \mathfrak{a} , on a $\text{div}_{\mathbf{A}}(x) \geq \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
En conséquence,*
 - $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ ne dépend que de $\text{Icl}(\mathfrak{a})$,
 - une inclusion $\mathfrak{b} \subseteq \text{Icl}(\mathfrak{a})$ implique $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) \geq \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$,
 - on a $\text{Icl}(\mathfrak{a}) \subseteq \text{Idv}(\mathfrak{a})$ et l'idéal $\text{Idv}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ est intégralement clos.
2. *En particulier \mathbf{A} est intégralement clos.*

Démonstration. 1. On note $\xi = \text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ et $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.

La relation de dépendance intégrale s'écrit

$$x^n = u_1 x^{n-1} + \cdots + u_{n-1} x + u_n \text{ avec } u_k \in \mathfrak{a}^k.$$

On a des inégalités $\text{div}_{\mathbf{A}}(u_k) \geq k\alpha$ et donc

$$n\xi \geq \bigwedge_{k=1}^n ((n-k)\xi + \text{div}(u_k)) \geq \bigwedge_{k=1}^n ((n-k)\xi + k\alpha),$$

et l'on conclut que $\xi \geq \alpha$ par [18, fait XI-2.12, point 13.]

2. En effet, un anneau intègre est intégralement clos si, et seulement si, ses idéaux principaux sont intégralement clos. \square

Exemple. Dans un anneau à pgcd intègre, l'idéal $\text{Idv}(\mathfrak{a})$ est l'idéal principal engendré par le pgcd des générateurs de \mathfrak{a} .

Par exemple sur l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x, y]$ (\mathbf{k} un corps discret), on a

$$\text{Idv}_{\mathbf{A}}(\langle x^4, y^3 \rangle) = \langle 1 \rangle \text{ et } \text{Icl}_{\mathbf{A}}(\langle x^4, y^3 \rangle) = \langle x^4, y^3, x^2 y^2, x^3 y \rangle.$$

Donc $\langle x^4, y^3 \rangle \subsetneq \text{Icl}_{\mathbf{A}}(\langle x^4, y^3 \rangle) \subsetneq \text{Idv}_{\mathbf{A}}(\langle x^4, y^3 \rangle)$. \blacksquare

Remarque. La démonstration du théorème précédent n'a pas utilisé toute la force d'un anneau à diviseurs. Il suffisait d'avoir un groupe réticulé G et une application $\text{div} : \mathbf{A}^* / \mathbf{A}^\times \rightarrow G$ qui satisfait les points D_1 et D_2 du projet divisoriel ainsi que le point 1 de la proposition 1.8. C'est-à-dire : $\text{div}_{\mathbf{A}}$ est un morphisme de groupes ordonnés qui réfléchit les inégalités et qui satisfait l'inégalité $\text{div}_{\mathbf{A}}(a) \wedge \text{div}_{\mathbf{A}}(b) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(a + b)$. \blacksquare

Corollaire 1.17 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs. Pour $p, q \in \mathbf{A}[X]$ on a*

$$\text{div}(c(pq)) = \text{div}(c(p)) + \text{div}(c(q)).$$

Démonstration. Cela résulte de $\text{div}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \text{div}(\mathfrak{a}) + \text{div}(\mathfrak{b})$, du théorème de Kronecker (c'est-à-dire $c(p)c(q) \subseteq \text{Icl}(c(pq))$), et du théorème 1.16. \square

Un autre corollaire est l'équivalence donnée ci-après pour les anneaux cohérents. Notons que ce théorème est une version constructive non noethérienne du théorème bien connu des mathématiques classiques qui affirme qu'un anneau noethérien intégralement clos est un anneau de Krull (voir [22, théorème 12.4]).

Théorème 1.18 *Pour un anneau \mathbf{A} cohérent intègre, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'anneau \mathbf{A} est intégralement clos.*
2. *L'anneau \mathbf{A} est à diviseurs.*
3. *Pour toute famille finie (a_1, \dots, a_n) dans \mathbf{A}^* , si $\langle b_1, \dots, b_m \rangle = (\langle a_1 \rangle : \langle a_1, \dots, a_n \rangle)_{\mathbf{A}}$, la famille des $a_i b_j$ admet a_1 comme pgcd fort.*

Démonstration. On sait déjà que $2 \Rightarrow 1$, et que lorsque \mathbf{A} est cohérent, $2 \Leftrightarrow 3$ (lemme 1.4). Il reste à montrer $1 \Rightarrow 3$. On pose $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$. On veut montrer que les $a_i b_j$ admettent a_1 comme pgcd fort.

Pour un $y \in \mathbf{A}^*$ on montre que ya_1 est un pgcd des $ya_i b_j$. Il est clair que ya_1 divise tous les $ya_i b_j$. Soit un $x \in \mathbf{A}^*$ qui divise tous les $ya_i b_j$, on doit montrer que la fraction $t = a_1 y / x$ est dans \mathbf{A} .

On considère $t_j = tb_j = (ya_1 b_j) / x$, qui est dans \mathbf{A} , et on montre que $t_j \in \mathbf{b}$.

On a $t_j a_i = a_1 (ya_i b_j) / x \in \langle a_1 \rangle$ pour chaque i , donc $t_j \in (\langle a_1 \rangle : \mathbf{a})_{\mathbf{A}} = \mathbf{b}$. Ainsi l'élément t de \mathbf{K} vérifie $t\mathbf{b} \subseteq \mathbf{b}$. Comme \mathbf{b} contient $a_1 \in \mathbf{A}^*$, c'est un \mathbf{A} -module fidèle. En outre il est de type fini, et puisque \mathbf{A} est intégralement clos, on obtient $t \in \mathbf{A}$. \square

NB : il existe des anneaux factoriels (cas particuliers d'anneaux de Krull) non cohérents (exemple 5.2 dans [12, Glaz], voir page 36).

Exemple important. Tout anneau intègre cohérent régulier est à diviseurs car il est intégralement clos. \blacksquare

Remarque. On a déjà noté que pour un anneau à diviseurs et un idéal fractionnaire de type fini \mathbf{a} , on a $\text{Idv}(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}^{-1})^{-1}$. Donc pour un anneau cohérent intégralement clos, un idéal de type fini \mathbf{a} et $a \in \mathbf{a}$ on peut calculer un système générateur fini de $\text{Idv}(\mathbf{a})$ par la formule $\text{Idv}(\mathbf{a}) = (\langle a \rangle : (\langle a \rangle : \mathbf{a})_{\mathbf{A}})_{\mathbf{A}}$. \blacksquare

Terminologie. Dans la littérature classique, pour un anneau noethérien intégralement clos \mathbf{A} , le groupe $\text{Div } \mathbf{A}$ est souvent appelé le *groupe des diviseurs de Weil*, et l'on appelle *diviseur effectif* un élément de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$, et *diviseur positif* un diviseur effectif non nul. La signification du mot effectif étant différente en mathématiques constructives, nous utiliserons la terminologie suivante : *diviseur positif ou nul* (au lieu de diviseur effectif) et *diviseur strictement positif* (au lieu de diviseur positif). \blacksquare

Anneaux à diviseurs de dimension ≤ 1

Un anneau intègre zéro-dimensionnel est un corps discret. Ceci règle la question des anneaux à diviseurs de dimension ≤ 0 .

Dans ce paragraphe, nous voyons que la question de la dimension ≤ 1 admet une réponse surprenante par sa simplicité.

Comme corollaire du théorème 1.18, puisqu'un domaine de Prüfer de dimension de Krull ≤ 1 est la même chose qu'un anneau intègre cohérent intégralement clos de dimension de Krull ≤ 1 ([18, théorème XII-6.2]) on obtient l'équivalence suivante : un anneau intègre de dimension de Krull ≤ 1 est un anneau de Prüfer si, et seulement si, c'est un anneau à diviseurs cohérent.

Mais en fait on a mieux, car on peut supprimer la cohérence dans cette équivalence. On obtient alors une version constructive non noethérienne du théorème des mathématiques classiques qui affirme qu'un anneau de Krull de dimension 1 est un domaine de Dedekind ([22, théorème 12.5]).

Théorème 1.19 *Pour un anneau intègre les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. \mathbf{A} est un anneau de Prüfer de dimension de Krull ≤ 1 .
2. \mathbf{A} est un anneau à diviseurs de dimension de Krull ≤ 1 .

Démonstration. Il faut prouver $2 \Rightarrow 1$. On suppose que \mathbf{A} est un anneau à diviseurs et on doit montrer qu'un idéal de type fini fidèle est inversible. On reprend mutatis mutandis la démonstration du théorème XI-3.12 dans [18] qui affirme qu'un anneau intègre à pgcd de dimension ≤ 1 est un anneau de Bezout.

Soit maintenant un idéal de type fini \mathfrak{a} . On a un idéal de type fini \mathfrak{b} tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ admet un pgcd fort $g \in \mathbf{A}^*$, donc par le lemme 1.20, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle g \rangle$ et \mathfrak{a} est bien un idéal inversible. \square

Lemme 1.20 *Dans un anneau intègre \mathbf{A} de dimension de Krull ≤ 1 , si g est un pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) , alors $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle g \rangle$.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité les $a_i \in \mathbf{A}^*$. Puisque g est un pgcd fort des a_i , 1 est un pgcd fort des $b_i = \frac{a_i}{g}$ et il suffit de montrer que $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle 1 \rangle$. On reprend la démonstration du lemme [18, XI-3.10].

Dans l'anneau zéro-dimensionnel $\mathbf{A}/\langle b_1 \rangle$, les b_i satisfont $\langle b_i^{m_i} \rangle = e_i$ pour des idempotents e_i . Si e est l'idempotent pgcd des e_i (modulo b_1), on a dans \mathbf{A} l'égalité $\langle b_1 \rangle = \langle b_1, e \rangle \langle b_1, 1 - e \rangle$, donc l'idéal $\langle b_1, e \rangle$ est localement principal. Et $\langle b_1, e \rangle = \langle b_1, b_2^{m_2}, \dots, b_n^{m_n} \rangle$.

Or 1 est un pgcd fort de $(b_1, b_2^{m_2}, \dots, b_n^{m_n})$. Mais comme $\langle b_1, e \rangle$ est localement principal, on en déduit qu'il est égal à $\langle 1 \rangle$ (car l'égalité est vraie après localisation en des éléments comaximaux), ce qui finalement implique $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle 1 \rangle$. \square

Anneaux de valuation discrète

On rappelle qu'un *anneau de valuation discrète* est par définition un anneau intègre \mathbf{V} donné avec un élément $p \notin \mathbf{V}^\times$, et dans lequel tout élément de \mathbf{V}^* s'écrit $p^n u$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $u \in \mathbf{V}^\times$. On dit alors que p est une *uniformisante* de \mathbf{V} . On peut voir \mathbf{V} comme un anneau principal à factorisation totale avec p pour seul irréductible (modulo l'association).

Lemme 1.21 (Anneaux de valuation discrète, 1)

Soit \mathbf{A} un anneau intègre. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. \mathbf{A} est un anneau de valuation discrète.
2. \mathbf{A} est un anneau à diviseurs et $\text{Div } \mathbf{A} \simeq (\mathbb{Z}, \geq)$.
3. \mathbf{A} est un anneau à diviseurs local de dimension ≤ 1 , $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret et contient un élément irréductible.
4. \mathbf{A} est un anneau principal local à factorisation totale et il existe un $a \in \mathbf{A}^* \setminus \mathbf{A}^\times$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2, 3$ et 4 . Clair

$2 \Rightarrow 1$. Soit π le générateur > 0 de $\text{Div } \mathbf{A}$. On a $\pi = \text{div}(\underline{a})$ pour une famille finie $(a_1, \dots, a_n) = (\underline{a})$. Puisque $\text{div}(a_i) = n_i \pi$ pour des $n_i \geq 0$, l'un des n_i est égal à 1. Ainsi $\pi = \text{div}(p)$ pour un $p \in \mathbf{A}^*$. Pour tout autre élément a de \mathbf{A}^* on a $\text{div}(a) = \text{div}(p^n)$ pour un $n \geq 0$, donc a et p^n sont associés. Ainsi \mathbf{A} est un anneau de valuation discrète d'uniformisante p .

$3 \Rightarrow 1$. En tant qu'anneau à diviseurs local de dimension 1, \mathbf{A} est un anneau de valuation (théorème 1.19). Puisque $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret, \mathbf{A} est à divisibilité explicite, et \mathbf{A} est réunion

disjointe explicite de $\mathbf{A}^\times = \{x \mid \operatorname{div}(x) = 0\}$ et $\operatorname{Rad} \mathbf{A} = \{x \mid \operatorname{div}(x) > 0\}$. Si π est un diviseur irréductible, il est élément > 0 minimum dans le groupe totalement ordonné $\operatorname{Div} \mathbf{A}$, on l'écrit $\pi = \operatorname{div}(p)$. Donc pour tout $a \in \operatorname{Rad} \mathbf{A}$, p divise a . En outre la dimension de Krull ≤ 1 de l'anneau nous donne une égalité $p^n(1 + px) + ay = 0$, donc a divise p^n pour un $n > 0$. Si n est la plus petite valeur possible et $az = p^n$ alors $z \in \mathbf{A}^\times$ car $0 \leq \operatorname{div}(z) < \operatorname{div}(p)$. Ainsi \mathbf{A} est un anneau de valuation discrète d'uniformisante p .

4 \Rightarrow 3. En effet \mathbf{A} est un anneau de valuation, et $\operatorname{Div} \mathbf{A}$ est discret parce que \mathbf{A} est à factorisation totale. En outre, $\operatorname{div}(a) > 0$, donc il existe un élément irréductible. \square

Remarque. Sous la seule hypothèse que \mathbf{A} est un anneau principal local à factorisation bornée avec un $a \in \mathbf{A}^* \setminus \mathbf{A}^\times$, il n'y a pas d'algorithme général pour produire un élément irréductible dans \mathbf{A} . \blacksquare

Localisations d'un anneau à diviseurs, 1

Théorème 1.22 *Soient \mathbf{A} un anneau à diviseurs et S un filtre ne contenant pas 0. L'anneau $S^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}_S$ est un anneau à diviseurs et il y a un unique morphisme de groupes réticulés $\varphi_S : \operatorname{Div} \mathbf{A} \rightarrow \operatorname{Div} \mathbf{A}_S$ tel que $\varphi_S(\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(a)) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(a)$ pour tout $a \in \mathbf{A}^*$. Ce morphisme est surjectif, donc $\operatorname{Div} \mathbf{A}_S \simeq (\operatorname{Div} \mathbf{A}) / \operatorname{Ker} \varphi_S$.*

Démonstration. On note tout d'abord que \mathbf{A}_S reste un anneau intègre. Ensuite vue la proposition 1.1 (point 1c), le résultat tient à ce qu'un ppcm reste un ppcm après localisation, car les localisations préservent les intersections finies d'idéaux ([18, fait II-6.5]). Ceci implique que les pgcd forts restent des pgcd forts, que les listes divisoriellement inversibles restent divisoriellement inversibles, que l'application

$$\varphi_S : \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) \mapsto \operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(x_1, \dots, x_n)$$

est bien définie, de $\operatorname{Div} \mathbf{A}$ vers $\operatorname{Div} \mathbf{A}_S$, et que c'est un morphisme de groupes réticulés. L'unicité est claire. \square

Pour un filtre S d'un anneau \mathbf{A} on appelle *hauteur de S* la dimension de Krull de \mathbf{A}_S . Un filtre S est dit *premier* si l'anneau \mathbf{A}_S est local. Autrement dit si l'implication suivante est satisfaite

$$x + y \in S \Rightarrow x \in S \text{ ou } y \in S.$$

Lorsque S est premier, détachable et ne contient pas 0, son complémentaire est un idéal premier détachable $\mathfrak{p} \neq \mathbf{A}$, et on appelle *hauteur de \mathfrak{p}* la hauteur de S . En fait, du point de vue constructif, la phrase bien définie est : « le filtre S est un filtre de hauteur $\leq k$ » (le filtre S n'est pas supposé détachable). Enfin un idéal premier détachable $\neq \mathbf{A}$ admet pour complémentaire un filtre premier. On obtient ainsi une bijection entre les idéaux premiers détachables $\neq \mathbf{A}$ et les filtres premiers détachables $\neq \mathbf{A}$.

Le lemme suivant est un complément pour le théorème 1.14.

Lemme 1.23 *Soit un anneau à diviseurs \mathbf{A} et \mathfrak{p} un idéal de type fini premier détachable de hauteur 1. Alors $\operatorname{div}(\mathfrak{p})$ est un diviseur irréductible.*

Démonstration. On doit montrer que $\operatorname{div}(\mathfrak{p}) > 0$. Si $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$, on sait que \mathbf{A}_S est un anneau à diviseurs avec un morphisme naturel surjectif de groupes réticulés $\operatorname{Div} \mathbf{A} \rightarrow \operatorname{Div} \mathbf{A}_S$ (théorème 1.22), et par hypothèse \mathbf{A}_S est de dimension de Krull 1. Donc par le théorème 1.19 c'est un anneau de Prüfer. Comme il est local c'est un anneau de valuation, d'idéal maximal $\mathfrak{p}\mathbf{A}_S$. On a $\operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{p}) = \operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_i \operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(a_i)$ pour des $a_i \in \mathbf{A}^* \cap \mathfrak{p}$. Comme les $\operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(a_i)$ sont deux à deux comparables et tous > 0 , on a $\operatorname{div}_{\mathbf{A}_S}(\mathfrak{p}) > 0$, ce qui implique $\operatorname{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{p}) > 0$. \square

Un anneau à la Kronecker

Dans ce paragraphe, les démonstrations sont laissées à la lectrice.

Soit \mathbf{B} un anneau arbitraire. On rappelle que l'on note $c_{\mathbf{B}, \underline{X}}(p)$ ou $c(p)$ le contenu de $p \in \mathbf{B}[\underline{X}] = \mathbf{B}[X_1, \dots, X_n]$, c'est-à-dire l'idéal de \mathbf{B} engendré par les coefficients de p .

On fixe des indéterminées \underline{X} et on définit l'ensemble

$$S_{\text{div}}(\mathbf{B}) = S_{\text{div}} = \{ f \in \mathbf{B}[\underline{X}] \mid \text{Gr}(c_{\mathbf{B}}(f)) \geq 2 \}.$$

Fait 1.24 *L'ensemble S_{div} est un filtre.*

Définition 1.25 *Le sous-anneau $\mathbf{B}_{\text{div}}(\underline{X}) = S_{\text{div}}^{-1}\mathbf{B}[\underline{X}]$ de $(\text{Frac } \mathbf{B})(\underline{X})$ est appelé l'anneau de Nagata divisoriel de \mathbf{B} .*

Remarque. Cette définition est à distinguer de celle des « Kronecker function rings » usuels de la littérature anglaise en théorie multiplicative des idéaux (voir à ce sujet le survey [9]). Le filtre S_{div} apparaît dans la littérature usuelle dans le cas d'un anneau intègre \mathbf{B} de corps de fractions \mathbf{K} , et l'anneau $\mathbf{B}_{\text{div}}(\underline{X})$ est alors appelé *anneau de Nagata pour la star opération* v définie comme suit : $v : \mathfrak{a} \mapsto (\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$. Pour un anneau intègre, notre $\mathbf{B}_{\text{div}}(\underline{X})$ est noté $\text{Na}(\mathbf{B}, v)$ ou $\text{Na}(\mathbf{B}, v)(X)$ par d'autres auteurs. ■

On vérifie alors les propriétés suivantes.

Proposition 1.26

1. Pour $a, b \in \text{Reg}(\mathbf{B})$, a divise b dans \mathbf{B} si, et seulement si, a divise b dans $\mathbf{B}_{\text{div}}(\underline{X})$.
2. Si \mathbf{A} est un anneau à diviseurs, alors
 - (a) $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ est un anneau de Bezout,
 - (b) tout $p \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ est le pgcd dans $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ de ses coefficients,
 - (c) pour $f, g \in \mathbf{A}[\underline{X}]$, $\frac{f}{g} \in \mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X}) \iff \text{div}_{\mathbf{A}}(c(g)) \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(c(f))$.

En particulier on obtient $\boxed{\text{Div } \mathbf{A} \simeq \text{Div}(\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})) \simeq \mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})^* / \mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})^\times}$.

Le théorème 1.28 démontre la réciproque suivante : si \mathbf{A} est intègre et si $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ est arithmétique (a fortiori si c'est un anneau de Bezout), alors \mathbf{A} est un anneau à diviseurs.

Principe local-global et applications

Principe local-global concret 1.27 (Principe local-global concret pour la divisibilité, les idéaux divisoriellement inversibles, les anneaux intégralement clos et les anneaux à diviseurs). Soit \mathbf{A} un anneau intègre et (s_1, \dots, s_n) une suite de profondeur ≥ 2 . On note $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{[\frac{1}{s_i}]}$.

1. Soient $a, b, a_1, \dots, a_k \in \mathbf{A}$.
 - (a) a divise b dans \mathbf{A} si, et seulement si, a divise b dans chaque \mathbf{A}_i .
 - (b) a est un pgcd fort de (a_1, \dots, a_k) dans \mathbf{A} si, et seulement si, a est un pgcd fort de (a_1, \dots, a_k) dans chaque \mathbf{A}_i .
 - (c) L'idéal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ est divisoriellement inversible dans \mathbf{A} si, et seulement si, il est divisoriellement inversible dans chaque \mathbf{A}_i .
2. L'anneau \mathbf{A} est intégralement clos si, et seulement si, chaque anneau \mathbf{A}_i est intégralement clos.
3. L'anneau \mathbf{A} est à diviseurs si, et seulement si, chaque anneau \mathbf{A}_i est à diviseurs.

Démonstration. 1b (et a fortiori 1a). Pour simplifier on se contente de localiser en trois monoïdes S , T et U . Soient $c, y \in \mathbf{A}^*$ et supposons que c divise les ya_i dans \mathbf{A} . Après localisation on trouve que c divise sya pour un $s \in S$, que c divise tya pour un $t \in T$ et que c divise uya pour un $u \in U$. Comme (s, t, u) admet 1 pour pgcd fort dans \mathbf{A} , cela implique que c divise ya dans \mathbf{A} .

1c. La démonstration est analogue, donnons les détails.

On considère un idéal de type fini $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle$ avec $a_1 \in \mathbf{A}^*$. On doit trouver un idéal de type fini \mathfrak{b} tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ admette a_1 comme pgcd fort (lemme 1.4). Pour simplifier on se contente de localiser en deux monoïdes S et T .

Dans le premier localisé on trouve b_1, \dots, b_m tels que les $u_{ij} = a_i b_j$ admettent a_1 pour pgcd fort (lemme 1.4).

Dans le deuxième localisé on trouve c_1, \dots, c_p tels que les $v_{ik} = a_i c_k$ admettent a_1 pour pgcd fort.

On peut supposer que les b_j et c_k sont dans \mathbf{A} ainsi que les u_{ij}/a_1 et v_{ik}/a_1 . On va montrer que la famille finie formée par les u_{ij} et v_{ik} admet a_1 pour pgcd fort dans \mathbf{A} . Pour cela on considère c et $y \in \mathbf{A}^*$ tels que c divise tous les yu_{ij} et yv_{ik} . Après localisation on trouve que c divise sya_1 pour un $s \in S$ et c divise tya_1 pour un $t \in T$. Comme s et t admettent 1 pour pgcd fort dans \mathbf{A} , cela implique que c divise ya_1 dans \mathbf{A} . Ainsi l'idéal de type fini $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p \rangle$ satisfait la condition que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ admet a_1 pour pgcd fort.

2 et 3. Résultent des points 1a et 1c. \square

Le corollaire suivant complète la proposition 1.26. Nous retrouvons ici un résultat de [16, Kang, 1989].

Théorème 1.28 (L'anneau de Nagata divisoriel)

Un anneau intègre \mathbf{A} est un anneau à diviseurs si, et seulement si, son anneau de Nagata divisoriel $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ est un domaine de Prüfer, ou encore un domaine de Bezout.

Démonstration. Nous montrons que si $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ est un domaine de Prüfer, tout idéal $\langle a, b \rangle$ est divisoriellement inversible. Dans $\mathbf{A}_{\text{div}}(\underline{X})$ on a des éléments u, v, s, t tels que $sa = ub$, $tb = va$, et $s + t = 1$. On peut prendre $u, v, s, t \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ auquel cas on obtient $\text{Gr}_{\mathbf{A}}(c(s+t)) \geq 2$. Les coefficients de s et t engendrent donc un idéal de profondeur ≥ 2 (i.e. $\text{Gr}_{\mathbf{A}}(c(s) + c(t)) \geq 2$). Or lorsqu'on inverse un coefficient s_k de s l'égalité $sa = ub$ dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ nous donne $\langle a, b \rangle = \langle b \rangle$ dans $\mathbf{A}[1/s_k]$, et lorsqu'on inverse un coefficient t_ℓ de t on obtient $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle$ dans $\mathbf{A}[1/t_\ell]$. Dans tous les cas l'idéal $\langle a, b \rangle$ est divisoriellement inversible dans le localisé. On conclut par le point 1c du principe local-global 1.27 que $\langle a, b \rangle$ est divisoriellement inversible dans \mathbf{A} . \square

Un autre corollaire intéressant est le suivant.

Théorème 1.29 (Idéaux divisoriellement inversibles comme idéaux de type fini « localement » principaux) Dans un anneau intègre un idéal de type fini fidèle est divisoriellement inversible si, et seulement si, il existe une suite (s_1, \dots, s_p) de profondeur ≥ 2 telle qu'après localisation en chaque s_i , l'idéal devient principal.

En conséquence un anneau intègre est un anneau à diviseurs si, et seulement si, tout idéal de type fini devient principal après localisation en les éléments d'une suite de profondeur ≥ 2 .

Démonstration. La condition est suffisante d'après le point 1c du principe local-global 1.27.

La condition est nécessaire. On a un idéal $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ avec les $a_i \in \mathbf{A}^*$. Soit \mathfrak{b} un idéal de type fini tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = g\mathfrak{c}$, $g \in \mathbf{A}^*$ et $\text{Gr}(\mathfrak{c}) \geq 2$. Écrivons $\mathfrak{c} = \langle c_1, \dots, c_q \rangle$. Fixons un c_j et notons $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}[1/c_j]$. Sur \mathbf{A}_j , $g\mathfrak{c} = \langle g \rangle$, donc l'idéal \mathfrak{a} est localement principal, donc il existe $(u_{j,1}, \dots, u_{j,n})$ comaximaux dans \mathbf{A}_j tels que $u_{j,i}\mathfrak{a} \subseteq \langle a_i \rangle$ dans \mathbf{A}_j pour chaque $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$. Cela signifie qu'il existe $(v_{j,1}, \dots, v_{j,n})$ dans \mathbf{A} tels que

- $v_{j,i}\mathfrak{a} \subseteq \langle a_i \rangle$ dans \mathbf{A} pour chaque $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$, et

– l'idéal $\langle v_{j,1}, \dots, v_{j,n} \rangle_{\mathbf{A}}$ contient une puissance $c_j^{m_j}$
 Bilan : d'une part lorsqu'on inverse un $v_{j,i}$ l'idéal devient égal à $\langle a_i \rangle$, et d'autre part l'idéal engendré par les $v_{j,i}$ contient les $c_j^{m_j}$, donc il est de profondeur ≥ 2 . \square

2 Propriétés de décomposition des groupes réticulés

Groupes réticulés quotients

Un sous groupe H d'un groupe (abélien) ordonné est dit *convexe* s'il vérifie la propriété : $0 \leq x \leq y$ et $y \in H$ impliquent $x \in H$. Sous cette condition, G/H est muni d'une structure de *groupe ordonné quotient*, i.e. vérifiant la propriété : $(G/H)^+ = G^+ + H$. Certains auteurs disent *sous-groupe isolé*.

Le noyau H de la projection canonique d'un groupe réticulé G sur un groupe réticulé quotient G/H est ce que l'on appelle un *sous-groupe solide*¹¹, c'est-à-dire un sous-groupe vérifiant la propriété : $\xi \in H$ et $|\xi| \leq |\zeta|$ impliquent $\zeta \in H$.

Pour $\gamma \in G$ on note $\mathcal{C}(\gamma)$ le sous-groupe solide engendré par γ , qui est l'ensemble des ξ tels que $|\xi|$ soit majoré par un élément $n|\gamma|$ ($n \in \mathbb{N}$). On a donc $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(|\gamma|)$.

Pour γ et $\eta \in G^+$ on a $\mathcal{C}(\gamma) \cap \mathcal{C}(\eta) = \mathcal{C}(\gamma \wedge \eta)$, et $\mathcal{C}(\gamma) \perp \mathcal{C}(\eta)$ si, et seulement si, $\gamma \perp \eta$. Enfin $\mathcal{C}(\gamma + \eta) = \mathcal{C}(\gamma \vee \eta)$ est le plus petit sous-groupe solide contenant $\mathcal{C}(\gamma)$ et $\mathcal{C}(\eta)$.

Nous définissons maintenant l'analogue des morphismes de localisation en un monoïde (définis dans la catégorie des anneaux commutatifs en [18, XV-4.5]) dans la catégorie des groupes réticulés.

Définition 2.1 (Morphismes de passage au quotient pour les groupes réticulés) *Soit G un groupe réticulé et H un sous-groupe solide de G . Un morphisme $\Pi : G \rightarrow G'$ est appelé un morphisme de passage au quotient par H s'il est surjectif et si $\text{Ker } \Pi = H$.*

Un morphisme de passage au quotient pour un H donné est « unique à isomorphisme unique près » : il y a un unique homomorphisme $G' \rightarrow G/H$ qui fait commuter le diagramme convenable, et c'est un isomorphisme.

Notez que comme $\Pi(z^+) = \Pi(z)^+$ pour tout z , on a $\Pi(G)^+ = \Pi(G^+)$.

Un principe de recouvrements par quotients

Rappelons le principe constructif suivant énoncé en [18, XI-2.10].

Principe de recouvrement par quotients pour les groupes réticulés.

Pour démontrer une égalité $\alpha = \beta$ dans un groupe réticulé, on peut toujours supposer que les éléments (en nombre fini) qui se présentent dans un calcul pour une démonstration de l'égalité sont comparables, si l'on en a besoin pour faire la démonstration. Ce principe s'applique aussi bien pour des inégalités que pour des égalités puisque $\alpha \leq \beta$ équivaut à $\alpha \wedge \beta = \alpha$.

Ce principe peut être considéré comme la version constructive du théorème de mathématiques classiques qui dit qu'un groupe réticulé est toujours représentable comme sous-groupe réticulé d'un produit de groupes totalement ordonnés.

11. On peut consulter [3]. Le théorème 2.2.1 donne les propriétés équivalentes suivantes pour un sous-groupe : (a) H est solide, (b) H est un sous-groupe réticulé convexe, (c) H est convexe et $\xi \in H \Rightarrow \xi^+ \in H$, (d) H est convexe et filtrant.

Groupes réticulés de dimension 1

Pour des sous-groupes réticulés H, K, L d'un groupe réticulé G , la notation $K = H \boxplus L$ signifie que $H \perp L$ et $K = H \oplus L$. Autrement dit, lorsque le produit cartésien $H \times L$ est muni de la structure produit catégorique, l'application $H \times L \rightarrow K, (\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$ est un isomorphisme de groupes réticulés.

En particulier, en notant $H^\perp = \{x \in G \mid \forall h \in H, x \perp h\}$, on a alors $H + H^\perp = H \boxplus H^\perp$.

Lemme 2.2 *Soient un groupe réticulé G , et $\alpha, \beta \in G^+$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\beta \in \mathcal{C}(\alpha) \boxplus \mathcal{C}(\alpha)^\perp$.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \beta_1, \beta_2 \in G^+, \beta_1 \leq n\alpha, \beta_2 \perp \alpha$ et $\beta = \beta_1 + \beta_2$.
3. $\exists n \in \mathbb{N}, \beta \wedge n\alpha = \beta \wedge (n+1)\alpha$, i.e. $n\alpha \geq \beta \wedge (n+1)\alpha$.
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, \beta \wedge m\alpha = \beta \wedge (m+1)\alpha$.
5. $\mathcal{C}(\beta) \subseteq \mathcal{C}(\alpha) \boxplus \mathcal{C}(\alpha)^\perp$.

Démonstration. 1 \Leftrightarrow 2, 4 \Rightarrow 3, et 5 \Rightarrow 1. Clair

2 \Rightarrow 4. Il suffit de le démontrer lorsque $\beta_2 \geq \alpha$ et lorsque $\beta_2 \leq \alpha$.

Si $\beta_2 \geq \alpha$ alors $\alpha = 0$, et $\beta \wedge m\alpha = 0$ pour tout m . Si $\beta_2 \leq \alpha$ alors $\beta_2 = 0$ donc $\beta = \beta_1 \leq n\alpha \leq m\alpha$ pour $m \geq n$, donc $\beta \wedge n\alpha = \beta \wedge m\alpha$.

3 \Rightarrow 2. On pose $\beta_1 = \beta \wedge n\alpha$ et $\beta_2 = \beta - \beta_1$. Il suffit de montrer $\beta_2 \wedge \alpha = 0$ lorsque $\beta \geq n\alpha$ et lorsque $\beta \leq n\alpha$. Si $\beta \leq n\alpha$, alors $\beta_1 = \beta$ et $\beta_2 = 0$. Si $\beta \geq n\alpha$, alors $\beta_1 = n\alpha$, et

$$n\alpha = \beta \wedge n\alpha = \beta \wedge (n+1)\alpha = (\beta_1 + \beta_2) \wedge (n\alpha + \alpha) = (n\alpha + \beta_2) \wedge (n\alpha + \alpha) = n\alpha + (\beta_2 \wedge \alpha),$$

donc $\beta_2 \wedge \alpha = 0$.

1 \Rightarrow 5. La somme directe orthogonale de deux sous-groupes solides est un sous-groupe solide.

□

Définition 2.3

Un groupe réticulé G est dit de dimension ≤ 1 si pour tout $\xi \in G^+$, on a $G = \mathcal{C}(\xi) \boxplus \mathcal{C}(\xi)^\perp$. Pour des propriétés équivalentes, voir le lemme 2.2.

Lemme 2.4 *Soit G un groupe réticulé de dimension ≤ 1 et $\xi \in G$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. G est discret
2. $\mathcal{C}(\xi)$ et $G/\mathcal{C}(\xi)$ sont discrets.
3. $\mathcal{C}(\xi)$ est détachable et discret.
4. $\mathcal{C}(\xi)^\perp$ est détachable et discret.

Démonstration. 1 \Leftrightarrow 2. L'égalité $G = \mathcal{C}(\xi) \boxplus \mathcal{C}(\xi)^\perp$ donne les isomorphismes $G/\mathcal{C}(\xi) \simeq \mathcal{C}(\xi)^\perp$ et $G \simeq \mathcal{C}(\xi) \times G/\mathcal{C}(\xi)$. Et un produit de deux groupes est discret si, et seulement si, chaque facteur est discret.

2 \Leftrightarrow 3. $G/\mathcal{C}(\xi)$ est discret si, et seulement si, $\mathcal{C}(\xi)$ est détachable.

2 \Leftrightarrow 4. L'égalité $G = \mathcal{C}(\xi) \boxplus \mathcal{C}(\xi)^\perp$ montre que dans cette affaire $\mathcal{C}(\xi)$ et $\mathcal{C}(\xi)^\perp$ jouent des rôles symétriques. □

Lemme 2.5 (Éléments irréductibles dans un groupe réticulé de dimension ≤ 1)

Soit G un groupe réticulé discret de dimension ≤ 1 et $\pi > 0$ dans G . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. π est un élément irréductible.

2. $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{Z}\pi \simeq (\mathbb{Z}, \geq 0)$.

3. Tout $\alpha \in G^+$ s'écrit de manière unique sous forme $n\pi + \alpha_2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_2 \perp \pi$ dans G^+ .

Démonstration. 1 \Rightarrow 2 et 3 \Rightarrow 1. Clair.

2 \Rightarrow 3. Soit $\alpha \in G^+$. On écrit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $0 \leq \alpha_1 \leq m\pi$, $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha_2 \perp \pi$ dans G^+ (point 2 du lemme 2.2). Puisque G est discret on a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leq \alpha_1 < (n+1)\pi$. Donc $\pi = (\alpha_1 - n\pi) + ((n+1)\pi - \alpha_1)$ tous deux ≥ 0 et le deuxième > 0 . Ceci implique que le premier est nul. \square

Groupe totalement ordonné de dimension 1

Un *groupe totalement ordonné* est un groupe ordonné dans lequel on a $x \geq 0$ ou $x \leq 0$ pour tout x . Il est facile de voir que c'est un groupe réticulé.

On note (\mathbb{O}, \geq) l'ensemble ordonné des réels pour lesquels on dispose d'un test de comparaison aux rationnels. C'est aussi la réunion disjointe de \mathbb{Q} et des irrationnels, définis par leurs fractions continues infinies. L'ensemble \mathbb{O} est stable pour les opérations $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$, où a, b, c, d sont des entiers avec $ad - bc \neq 0$. On a aussi une application bien définie « identité », de \mathbb{O} vers \mathbb{R} . Par contre on ne peut pas démontrer constructivement que \mathbb{O} soit égal à \mathbb{R} , ni que \mathbb{O} soit discret, ou stable pour l'addition, ou stable pour la multiplication. Une partie R de \mathbb{O} sera appelée un sous-groupe (additif) de \mathbb{O} si l'on a une fonction $+: \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}$ qui redonne l'addition dans \mathbb{R} .

Lemme 2.6 (Groupes totalement ordonnés discrets archimédiens)

Soit G un groupe réticulé discret non nul. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. G est totalement ordonné de dimension 1.
2. Pour tous $\alpha, \beta > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\alpha > \beta$.
3. Pour tout $\alpha > 0$, $G = \mathcal{C}(\alpha)$.
4. G est de dimension 1 et pour tout $\alpha > 0$, $G = \mathcal{C}(\alpha)$.
5. G est isomorphe à (R, \geq) pour un sous-groupe discret de (\mathbb{O}, \geq) .
6. Pour tout $\alpha > 0$ dans G , on a un isomorphisme $\varphi_\alpha: G \rightarrow R_\alpha$ tel que $\varphi_\alpha(\alpha) = 1$, où (R_α, \geq) est un sous-groupe discret de (\mathbb{O}, \geq) . En outre φ_α et R_α sont déterminés de manière unique.

Démonstration. 1 \Rightarrow 2, 6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2, et 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4. Clair

4 \Rightarrow 1. (l'ordre est total). Pour α et $\beta \in G^+$ il suffit de montrer que $\alpha \wedge \beta = 0$ implique $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. On écrit $\alpha = \alpha_1 + \alpha \wedge \beta$ et $\beta = \beta_1 + \alpha \wedge \beta$. On a $\alpha_1 \perp \beta_1$. Donc si $\alpha_1 > 0$, une inégalité $\beta_1 \leq m\alpha_1$ implique $\beta_1 = 0$, donc $\beta \leq \alpha$.

1 et 2 \Rightarrow 6. Calcul classique du développement en fraction continue. \square

Sous-groupes premiers d'un groupe réticulé

Définition 2.7

Un sous-groupe solide H d'un groupe réticulé G est dit *premier* si le quotient G/H est un groupe totalement ordonné.

Naturellement G/H est discret si, et seulement si, H est une partie détachable de G .

Lemme 2.8 Soit G un groupe réticulé discret de dimension ≤ 1 et π un élément irréductible. Alors π^\perp est un sous groupe premier et $G/\pi^\perp \simeq \mathcal{C}(\pi) = \mathbb{Z}\pi$.

Démonstration. D'après la définition 2.3, $G/\pi^\perp \simeq \mathcal{C}(\pi)$ et l'égalité $\mathcal{C}(\pi) = \mathbb{Z}\pi$ traduit le fait que π est irréductible (lemme 2.5). \square

Remarque. La dimension des groupes réticulés qui intervient dans la définition 2.3 est la dimension de Krull du treillis distributif, noté $\text{Zar } G$, obtenu en quotientant le treillis distributif $G^+ \cup \{\infty\}$ par la relation d'équivalence suivante :

$$\xi \sim \zeta \iff \exists n > 0 \text{ tel que } \xi \leq n\zeta \text{ et } \zeta \leq n\xi.$$

Autrement dit encore $\text{Zar } G$ est l'ensemble des sous-groupes $\mathcal{C}(\xi)$ ($\xi \in G^+$), auquel on rajoute un élément $+\infty$, avec sa structure de treillis distributif naturelle.

Un groupe réticulé est zéro-dimensionnel si, et seulement si, il est nul. Un groupe totalement ordonné a pour dimension son rang défini de manière « usuelle ». Les groupes totalement ordonnés \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont de rang 1, un produit fini catégorique a pour rang le maximum des rangs des facteurs, un produit lexicographique a pour rang la somme des rangs. En mathématiques classiques la dimension d'un groupe réticulé peut être définie comme la longueur maximum d'une chaîne de sous-groupes premiers (ici, comme pour les idéaux premiers d'un anneau commutatif, la chaîne $H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2$ est dite de longueur 2, mais notez que la chaîne maximale dans \mathbb{Z} est $0 \subsetneq \mathbb{Z}$).

Pour un anneau de valuation \mathbf{V} la dimension de $\text{Div } \mathbf{V}$ (son rang en tant que groupe totalement ordonné) est égale à la dimension valuative de \mathbf{V} , qui est égale à sa dimension de Krull. Ceci s'étend aux domaines de Prüfer mais pas aux anneaux de Krull : un anneau $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ (où \mathbf{K} est un corps discret) est un anneau de Krull de dimension de Krull n (égale à sa dimension valuative), alors que son groupe de diviseurs reste de dimension 1. \blacksquare

Propriétés de décomposition générales

Nous donnons quelques définitions constructives liées aux propriétés de décomposition (voir [18, Chapitre XI]).

Définition 2.9 (Quelques propriétés de décomposition dans les groupes réticulés)

1. Une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments > 0 dans un groupe réticulé admet une décomposition partielle si l'on peut trouver une famille finie $(p_j)_{j \in J}$ d'éléments > 0 deux à deux orthogonaux telle que chaque a_i s'écrive $\sum_{j \in J} r_{ij} p_j$ avec les $r_{ij} \in \mathbb{N}$. La famille $(p_j)_{j \in J}$ est alors appelée une base de décomposition partielle pour la famille $(a_i)_{i \in I}$.
2. Un groupe réticulé est dit à décomposition partielle s'il est discret et si toute famille finie d'éléments > 0 admet une décomposition partielle.
3. Un groupe réticulé est dit à décomposition bornée lorsque pour tout $x \geq 0$ il existe un entier n tel que, lorsque $x = \sum_{j=1}^n x_j$ avec les $x_j \geq 0$, au moins l'un des x_j est nul.
4. Le groupe réticulé à décomposition bornée G est dit absolument borné s'il existe un entier n tel que dans toute famille de n éléments deux à deux orthogonaux dans G^+ , il y a un élément nul.
5. Un groupe réticulé est dit à décomposition complète s'il est discret et si tout élément > 0 est une somme d'éléments irréductibles.

Un exemple classique de groupe réticulé à décomposition partielle mais pas à décomposition bornée est le groupe des diviseurs de l'anneau de tous les entiers algébriques complexes (qui est un anneau de Bezout de dimension 1).

Nous donnons maintenant quelques résultats constructifs de base (voir [18] pour la plupart d'entre eux, notamment pour le point 2, qui est donné par le théorème XI-2.16 de [18]).

Proposition 2.10 (Quelques relations liant les propriétés de décomposition dans les groupes réticulés)

1. Un groupe réticulé à décomposition complète est à décomposition bornée.
2. Un groupe réticulé discret et à décomposition bornée est à décomposition partielle.
3. Un groupe réticulé à décomposition partielle est de dimension ≤ 1 .
4. Pour un groupe réticulé discret non nul G les propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (a) G est à décomposition complète.
 - (b) G est à décomposition bornée et il possède un test d'irréductibilité¹² pour les éléments > 0 .
 - (c) G est à décomposition bornée et tout élément > 0 est minoré par un élément irréductible.
 - (d) G est isomorphe comme groupe réticulé à un groupe $\mathbb{Z}^{(I)}$ pour un ensemble discret I . On peut prendre pour I l'ensemble des éléments irréductibles de G .

Démonstration. Vu les résultats présentés dans [ACMC], seul le point 3 réclame une démonstration.

3. On considère une base de décomposition partielle (π_1, \dots, π_k) pour le couple (ξ, ζ) . On écrit $\xi = \sum_{i \in I} n_i \pi_i$ avec des $n_i > 0$. On note J la partie complémentaire de I dans $\llbracket 1..k \rrbracket$,

$$\zeta = \sum_i m_i \pi_i = \zeta_1 + \zeta_2 \text{ avec } \zeta_1 = \sum_{i \in I} m_i \pi_i \text{ et } \zeta_2 = \sum_{i \in J} m_i \pi_i.$$

On a bien $\zeta_2 \perp \xi$, et $\zeta_1 \leq m\xi$ si m majore les m_i/n_i pour $i \in I$. \square

Lemme 2.11 Soit G un groupe réticulé à décomposition complète et I_G l'ensemble de ses éléments irréductibles.

1. Pour tout sous-groupe solide détachable H de G , on a $G = H \boxplus H^\perp$.
2. L'application $H \mapsto I_H = I_G \cap H$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes solides détachables de G et l'ensemble des parties détachables de I_G .

Démonstration. On démontre que si un irréductible π n'est pas dans I_H , il est dans H^\perp . En effet, si $\alpha \in H^+$, l'élément $\alpha \wedge \pi$, qui est égal à π ou 0, est nécessairement nul. Le reste suit. \square

Remarque. Dans le lemme précédent, l'égalité $G = H \boxplus H^\perp$ ne peut pas être démontrée constructivement si on remplace l'hypothèse « G à décomposition complète » par « G à décomposition bornée ». Ceci crée quelques subtilités algorithmiques que l'on retrouvera par la suite. \blacksquare

Lemme 2.12 Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille qui admet une base de décomposition partielle dans un groupe réticulé G : $\alpha_i = \sum_{j \in J} r_{ij} \pi_j$ pour des π_j deux à deux orthogonaux.

Alors $\bigwedge_i \alpha_i = \sum_{j \in J} \inf_{i \in I} (r_{ij}) \pi_j$ et $\bigvee_i \alpha_i = \sum_{j \in J} \sup_{i \in I} (r_{ij}) \pi_j$.

Nous utilisons maintenant le principe [18, XI-2.10] cité page 20 pour obtenir des résultats qui s'avèreront utiles pour le groupe des diviseurs d'un anneau à diviseurs en raison de l'inégalité $\text{div}(a + b) \geq \text{div}(a) \wedge \text{div}(b)$.

Lemme 2.13 Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans un groupe réticulé G .

On pose $\gamma_i = \bigwedge_{j \neq i} \alpha_j$ et l'on suppose que $\gamma_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$.

Alors $\bigwedge_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket} \left(\bigwedge_{j \in \llbracket 1..n \rrbracket, j \neq i} (|\alpha_i - \alpha_j| + \sum_{k \notin \{i, j\}} (\alpha_i - \alpha_k)^+) \right) = 0$.

12. À la question « π est-il irréductible ? », le test doit donner l'une des deux réponses suivantes :

- « oui », ou
- « non et voici $\pi_1, \pi_2 > 0$ tels que $\pi = \pi_1 + \pi_2$ ».

Démonstration. Il suffit de le démontrer lorsque les α_i sont totalement ordonnés. Par exemple si α_i et α_j sont plus petits que tous les autres, les inégalités $\gamma_i \leq \alpha_i$ et $\gamma_j \leq \alpha_j$ donnent $\alpha_j \leq \alpha_i$ et $\alpha_i \leq \alpha_j$, donc $\alpha_j = \alpha_i$. \square

L'inégalité $\text{div}(a + b) \geq \text{div}(a) \wedge \text{div}(b)$ peut se lire de manière symétrique en disant que si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ alors chaque $\text{div}(a_i)$ majore la borne inférieure des deux autres. Ceci se généralise par récurrence comme suit.

Fait 2.14 Dans un anneau à diviseurs on a l'implication

$$\sum_{j=1}^n a_j = 0 \Rightarrow \bigwedge_{i,j:j>i} |\text{div}(a_j) - \text{div}(a_i)| = 0.$$

Démonstration. Pour chaque j , on a $-a_j \in \langle a_i \mid i \neq j \rangle$, donc $\text{div}(a_j) \geq \bigwedge_{i \neq j} \text{div}(a_i)$. On conclut avec le lemme 2.13. \square

Lemme 2.15 Soient un groupe réticulé G , et $\beta_1, \dots, \beta_p, \xi, \zeta$ dans G^+ .

On suppose que $\bigwedge_{j \in \llbracket 1..p \rrbracket} |\xi - \beta_j| = 0 = \bigwedge_{j \in \llbracket 1..p \rrbracket} |\zeta - \beta_j|$.

1. On a $\xi \leq \bigvee_{j \in \llbracket 1..p \rrbracket} \beta_j$.
2. On suppose que pour chaque $j, k \in \llbracket 1..p \rrbracket$, $\beta_j \in \mathcal{C}(\beta_k) \boxplus \mathcal{C}(\beta_k)^\perp$.
Alors, pour $\gamma, \delta \in \{\xi, \zeta, \beta_1, \dots, \beta_p\}$, on a $\gamma \in \mathcal{C}(\delta) \boxplus \mathcal{C}(\delta)^\perp$, i.e. $\mathcal{C}(\gamma) \subseteq \mathcal{C}(\delta) \boxplus \mathcal{C}(\delta)^\perp$.

Démonstration. Pour le point 1 il faut démontrer une inégalité, et pour le point 2 on veut une égalité $\gamma + m\delta = \gamma + (m+1)\delta$. Il suffit donc (principe [18, XI-2.10]) de faire la démonstration lorsque les $|\xi - \beta_j|$ sont totalement ordonnés ainsi que les $|\zeta - \beta_j|$.

Dans ce cas, il y a un indice h pour lequel $\xi = \beta_h$, et donc $\xi \leq \bigvee_{j \in \llbracket 1..p \rrbracket} \beta_j$.

Ceci donne le point 1. Voyons le point 2.

On a aussi un indice ℓ pour lequel $\zeta = \beta_\ell$.

D'après le point 4 du lemme 2.2 il y a un entier m tel que

$$m\beta_j \wedge \beta_k = (1+m)\beta_j \wedge \beta_k \text{ pour tous les } j, k.$$

Ceci reste vrai en remplaçant β_j et/ou β_k par ξ ou ζ . \square

Propriétés de décomposition pour un groupe réticulé quotient

Proposition 2.16 Soit G un groupe réticulé et $\pi : G \rightarrow G'$ un morphisme de passage au quotient par un sous-groupe solide H .

1. Si G est de dimension ≤ 1 , G' l'est également.
2. Si G est à décomposition bornée, G' l'est également.
3. Si G est à décomposition partielle et si G' est discret, G' est à décomposition partielle.
4. Si G est à décomposition complète et si G' est discret, G' est à décomposition complète.
5. Si G est discret à décomposition bornée et si $H = \alpha^\perp$ pour un $\alpha > 0$, alors G' est isomorphe à $\mathcal{C}(\alpha)$ et absolument borné.

Démonstration. 1. On doit montrer que dans le quotient, pour tous x, y on a un entier n tel que $y \wedge nx = y \wedge (n+1)x$. Or c'est déjà vrai avant de passer au quotient.

2. On considère un élément $x \in G^+$. On suppose que si $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec des $x_i \in G^+$, alors l'un des x_i est nul.

Supposons que l'on ait $\pi(x) = \sum_{i=1}^n \pi(y_i)$ avec des $\pi(y_i) \geq 0$ dans G' . Comme $\pi(y_i) = \pi(y_i^+)$, on peut supposer les $y_i \geq 0$. On a $x = u + \sum_{i=1}^n y_i$ avec $u \in H$. On écrit $u = u^+ - u^-$, on remplace y_1 par $u^+ + y_1$.

On a maintenant $x = \sum_{i=1}^n y_i - u^-$. On a donc $u^- \leq \sum_{i=1}^n y_i$ et par le théorème de Riesz [18, XI-2.11 1], on écrit $u^- = \sum_{i=1}^n u_i$ avec $0 \leq u_i \leq y_i$. Enfin on remplace chaque y_i par

$z_i = y_i - u_i$ et l'on a $x = \sum_{i=1}^n z_i$ avec des $z_i \geq 0$, donc l'un des z_i est nul, et pour cet indice i , on a $\pi(y_i) = \pi(z_i) = 0$.

3. On considère une famille finie $(\pi(x_i))_{i \in I}$ on calcule une base de factorisation partielle de la famille $(x_i)_{i \in I}$. On supprime les éléments de cette base qui deviennent nuls dans le quotient. Les éléments restants sont > 0 dans le quotient, et deux à deux orthogonaux.

4. Pour $\pi(x) > 0$ dans G' , on considère une factorisation complète de x dans G . Il suffit de vérifier la propriété suivante : si p est irréductible, alors $\pi(p)$ est nul ou irréductible. Supposons que $\pi(p) = \pi(q) + \pi(r)$, tous ≥ 0 dans G' . On peut supposer $q = q^+$ et $r = r^+$. On écrit $p + u^- = q + r + u^+$ avec $u \in H$. Le théorème de Riesz [18, XI-2.11 2] nous donne des p_i et $v_i \geq 0$ satisfaisant

$$p = p_1 + p_2 + p_3, u^- = v_1 + v_2 + v_3, p_1 + v_1 = q, p_2 + v_2 = r \text{ et } p_3 + v_3 = u^+,$$

d'où $\pi(q) = 0$ si $p_1 = 0$ et $\pi(r) = 0$ si $p_2 = 0$.

5. En effet G est de dimension ≤ 1 donc $G' \simeq \mathcal{C}(\alpha)$, qui est absolument borné. \square

Par contre la propriété pour un groupe réticulé d'être discret ne passe pas toujours au quotient. Fort heureusement on a le lemme 2.4.

3 Propriétés de stabilité pour les anneaux à diviseurs

Localisations d'un anneau à diviseurs, 2

Théorème 3.1 Soient \mathbf{A} un anneau à diviseurs, S un filtre ne contenant pas 0, et H_S le sous-groupe solide de $\text{Div } \mathbf{A}$ engendré par les $\text{div}_{\mathbf{A}}(s)$ pour $s \in S$. On a les propriétés suivantes.

1. L'anneau $S^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}_S$ est un anneau à diviseurs et il y a un unique morphisme de groupes réticulés $\varphi_S : \text{Div } \mathbf{A} \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}_S$ tel que $\varphi_S(\text{div}_{\mathbf{A}}(a)) = \text{div}_{\mathbf{A}_S}(a)$ pour tout $a \in \mathbf{A}^*$. Ce morphisme est surjectif, donc $\text{Div } \mathbf{A}_S \simeq (\text{Div } \mathbf{A}) / \text{Ker } \varphi_S$.
2. On a $H_S^+ = \{ \alpha \in \text{Div } \mathbf{A} \mid \exists s \in S, 0 \leq \alpha \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(s) \}$, et les diviseurs principaux dans H_S^+ sont les éléments de $\text{div}_{\mathbf{A}}(S)$.
3. Supposons que $\text{Div } \mathbf{A} = H_S \boxplus H'$. Alors le morphisme φ_S est un morphisme de passage au quotient par H_S : il permet d'identifier $\text{Div } \mathbf{A}_S$ au groupe réticulé quotient $(\text{Div } \mathbf{A}) / H_S \simeq H'$.

Démonstration. 1. C'est le théorème 1.22.

2. En notant $H_1 = \{ \alpha \in \text{Div } \mathbf{A} \mid \exists s \in S, 0 \leq \alpha \leq \text{div}_{\mathbf{A}}(s) \}$, on vérifie facilement que $H_1 + H_1 \subseteq H_1$ et que $H_1 - H_1$ est un sous-groupe solide dont la partie positive est égale à H_1 .

3. Il est clair que φ_S est surjectif et que $H_S \subseteq \text{Ker } \varphi_S$. On doit montrer l'inclusion réciproque. Un élément du noyau s'écrit $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_k)$ pour une suite (a_1, \dots, a_k) de profondeur ≥ 2 dans \mathbf{A}_S . On peut supposer que les a_i sont dans \mathbf{A} . Si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 \in H_S$ et $\alpha_2 \in H'$, on a $\varphi_S(\alpha) = \varphi_S(\alpha_2)$. On peut donc supposer $\alpha \perp H_S$, c'est-à-dire que la suite (a_1, \dots, a_k, s) est de profondeur ≥ 2 dans \mathbf{A} pour tout $s \in S$. On est donc ramené à montrer que si (a_1, \dots, a_k) est de profondeur ≥ 2 dans \mathbf{A}_S et (a_1, \dots, a_k, s) est de profondeur ≥ 2 dans \mathbf{A} pour tout $s \in S$, alors (a_1, \dots, a_k) est de profondeur ≥ 2 dans \mathbf{A} . Soit donc une suite (c_1, \dots, c_k) proportionnelle à (a_1, \dots, a_k) . Il existe $c \in \mathbf{A}^*$ et $s \in S$ tels que $sc_i = ca_i$ pour $i \in \llbracket 1..k \rrbracket$. Ceci implique que les suites (a_1, \dots, a_k, s) et (c_1, \dots, c_k, c) sont proportionnelles, donc il existe $d \in \mathbf{A}^*$ tel que $(c_1, \dots, c_k, c) = d(a_1, \dots, a_k, s)$. En particulier $(c_1, \dots, c_k) = d(a_1, \dots, a_k)$, ce qui termine la démonstration. \square

Anneaux avec groupe des diviseurs de dimension 1

Lemme 3.2 *Soit \mathbf{A} un domaine de Bezout avec $\text{Div } \mathbf{A}$ de dimension ≤ 1 . Pour un $a \in \mathbf{A}^*$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $a \in \text{Rad } \mathbf{A}$.
2. $\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(\text{div}_{\mathbf{A}}(a))$.

Démonstration. 1 \Rightarrow 2. L'anneau est de Bezout donc tous les diviseurs sont principaux. Pour un $b \in \mathbf{A}^*$ arbitraire, puisque $\text{Div } \mathbf{A}$ est de dimension ≤ 1 , par le point 2 du lemme 2.2, on écrit $b = b_1 b_2$ avec b_1 et $b_2 \in \mathbf{A}^*$, $b_1 \mid a^n$ et $\text{div}_{\mathbf{A}}(a, b_2) = 0$. Puisque l'anneau est de Bezout, $1 \in \langle a, b_2 \rangle$, et puisque $a \in \text{Rad } \mathbf{A}$, $b_2 \in \mathbf{A}^\times$. Donc $\text{div}_{\mathbf{A}}(b) = \text{div}_{\mathbf{A}}(b_1) \in \mathcal{C}(a)$.

2 \Rightarrow 1. Pour tout $b \in \mathbf{A}^*$ on a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $b \mid a^n$. Si $b = 1 + ax$, on a $\langle b, a \rangle = \langle 1 \rangle$, donc $\langle b \rangle = \langle b, a^n \rangle = \langle 1 \rangle$. \square

Proposition 3.3 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs de dimension de Krull ≤ 1 . Alors $\text{Div } \mathbf{A}$ est de dimension ≤ 1 .*

Démonstration. Les anneaux à diviseurs de dimension ≤ 1 sont des domaines de Prüfer (théorème 1.19). On utilise alors la propriété de factorisation des idéaux de type fini fidèles dans un domaine de Prüfer de dimension ≤ 1 donnée par [18, théorème XII-7.2].

On pourrait aussi argumenter « plus directement » en montrant que la dimension de Krull d'un domaine de Prüfer est égale à la dimension de son groupe des diviseurs. \square

La proposition qui suit est un corollaire du théorème 3.1.

Proposition 3.4 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs et S le filtre engendré par un $s \in \mathbf{A}^*$ (i.e. l'ensemble des x qui divisent une puissance de s). D'après le théorème 3.1, l'anneau \mathbf{A}_S est aussi un anneau à diviseurs.*

1. Si $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret de dimension 1, il en va de même pour $\text{Div } \mathbf{A}_S$.
2. Si en outre $\text{Div } \mathbf{A}$ est à décomposition partielle ou à décomposition bornée ou à décomposition complète, il en va de même pour \mathbf{A}_S .
3. Si \mathbf{A} est noethérien cohérent fortement discret, alors \mathbf{A}_S est également noethérien cohérent fortement discret.

Démonstration. On a $H_S = \mathcal{C}(\text{div}(s)) = \{ \xi \in \text{Div } \mathbf{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}, |\xi| \leq n \text{div}(s) \}$.

1 et 2. On conclut avec le lemme 2.4 et la proposition 2.16.

3. Résultat classique (cf. [18, principe local-global XII-7.13]). \square

Théorème 3.5

Soient \mathbf{A} un anneau à diviseurs avec $\text{Div } \mathbf{A}$ discret de dimension 1, α un diviseur > 0 et $S_\alpha = \{ x \in \mathbf{A}^* \mid \text{div}(x) \perp \alpha \}$. Il est clair que S_α est un filtre détachable, et le théorème 3.1 s'applique. On a les propriétés suivantes.

1. L'anneau $S_\alpha^{-1} \mathbf{A}$ est un anneau à diviseurs avec $\text{Div}(S_\alpha^{-1} \mathbf{A}) \simeq \mathcal{C}(\alpha)$.
En particulier $S_\alpha^{-1} \mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète si, et seulement si, $\mathcal{C}(\alpha)$ est isomorphe à (\mathbb{Z}, \geq) .
2. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (a) α est un diviseur irréductible.
 - (b) $\mathcal{C}(\alpha) = \mathbb{Z}\alpha$.
 - (c) $\text{Idv}(\alpha)$ est un idéal premier.
 - (d) S_α est un filtre premier de hauteur ≤ 1 et $\mathbf{A} = S_\alpha \cup \text{Idv}(\alpha)$ (union disjointe de deux parties détachables).

- (e) $S_\alpha^{-1}\mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète et si $p/1$ est une uniformisante, on a $\alpha = \operatorname{div}_\mathbf{A}(p) \bmod \mathcal{C}(\alpha)^\perp$.
3. Si en outre l'anneau \mathbf{A} est cohérent, les quatre ensembles suivants sont égaux (on rappelle, théorème 1.13, que $\alpha \mapsto \operatorname{Idv}(\alpha)$ établit une bijection entre les diviseurs irréductibles et les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$).
- Les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$.
 - Les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle$ tels que $\operatorname{div}(\mathfrak{q}) > 0$.
 - Les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$ tels que $\mathfrak{q} = \operatorname{Idv}(\mathfrak{q})$.
 - Les idéaux de type fini premiers détachables de hauteur 1.

Démonstration. 1. On a $\operatorname{Div} \mathbf{A} = \mathcal{C}(\alpha) \boxplus \mathcal{C}(\alpha)^\perp$. On applique donc le point 3 du théorème 3.1. On a (mêmes notations) $H_{S_\alpha} = \mathcal{C}(\alpha)^\perp$, donc $\operatorname{Div}(S_\alpha^{-1}\mathbf{A}) \simeq \mathcal{C}(\alpha)$. Pour la dernière affirmation on applique le lemme 1.21.

2. Notons d'abord que puisque $\alpha > 0$, $\operatorname{Div} \mathbf{A}$ n'est pas nul, et \mathbf{A} n'est pas un corps. Par ailleurs les hypothèses impliquent que \mathbf{A} est à divisibilité explicite, et que S_α et $\operatorname{Idv}(\alpha)$ sont deux parties détachables disjointes de \mathbf{A} .

2a \Leftrightarrow 2b. D'après le lemme 2.5.

2a \Leftrightarrow 2c. D'après le théorème 1.13.

2d \Rightarrow 2c, et 2e \Rightarrow 2c. Clair.

2a \Rightarrow 2d et 2e. D'après le point 1 et puisque $\mathcal{C}(\alpha) = \mathbb{Z}\alpha \simeq \operatorname{Div}(S_\alpha^{-1}\mathbf{A})$, l'anneau $S_\alpha^{-1}\mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète, et α vu dans $S_\alpha^{-1}\mathbf{A}$ est égal à $\operatorname{div}(\frac{p}{1})$ si p engendre le radical. Il reste à voir que le complémentaire de S_α est bien l'idéal $\operatorname{Idv}(\alpha)$ (qui est alors premier de hauteur 1 par définition). Tout diviseur $\xi \geq 0$ s'écrit $n_\xi \alpha + \rho$ avec $n_\xi \in \mathbb{N}$ et $\rho \perp \alpha$ (lemme 2.5). Par définition $\operatorname{Idv}(\alpha) = \{x \in \mathbf{A} \mid \xi = \operatorname{div}_\mathbf{A}(x) \geq \alpha\}$. Dans la décomposition précédente, cela signifie que $n_\xi > 0$, tandis que $x \in S_\alpha$ signifie $n_\xi = 0$. On a donc bien deux parties complémentaires de \mathbf{A} .

3. Les trois premiers ensembles sont égaux d'après le corollaire 1.15. Il reste à montrer que \mathfrak{p} est un idéal de type fini premier détachable de hauteur 1 si, et seulement si, on a $\operatorname{div}(\mathfrak{p}) > 0$. L'implication \Leftarrow est donnée par 2c \Rightarrow 2d.

L'implication \Rightarrow est donnée par le lemme 1.23. \square

Stabilité pour les anneaux de polynômes

Dans ce paragraphe, \mathbf{A} est un anneau à diviseurs.

Pour $p \in \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$, on note $c(p)$ pour $c_{\mathbf{A}, \underline{X}}(p)$.

Lemme 3.6 Une fraction p/q dans $\mathbf{K}(\underline{X})$ (avec p et $q \in \mathbf{A}[\underline{X}]$) est dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ si, et seulement si, $p/q \in \mathbf{K}[\underline{X}]$ et $\operatorname{div}(c(q)) \leq \operatorname{div}(c(p))$. Autrement dit, pour $p, q \in \mathbf{A}[\underline{X}]$, q divise p dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ si, et seulement si, q divise p dans $\mathbf{K}[\underline{X}]$ et $\operatorname{div}(c(q)) \leq \operatorname{div}(c(p))$.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Puisque q divise p dans $\mathbf{K}[\underline{X}]$ on écrit $qr = ap$ avec $a \in \mathbf{A}^*$ et $r \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. On veut montrer que $r/a \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. Or $\operatorname{div}(c(r)) \geq \operatorname{div}(a)$, car

$$\operatorname{div}(c(q)) + \operatorname{div}(c(r)) = \operatorname{div}(a) + \operatorname{div}(c(p)).$$

Et puisque $a \in \mathbf{A}^*$ cela signifie que a divise tous les coefficients de r . \square

Le théorème suivant est une version constructive non noethérienne du théorème qui affirme que si \mathbf{A} est un anneau de Krull, il en est de même pour $\mathbf{A}[\underline{X}]$ (voir le théorème 3.8 et [22, théorème 12.4]).

Théorème 3.7 Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs de corps de fractions \mathbf{K} . L'anneau $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est également à diviseurs. En outre on a un isomorphisme naturel de groupes réticulés

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(\mathbf{A}[\underline{X}]) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Div}(\mathbf{K}[\underline{X}]) \times \operatorname{Div} \mathbf{A}, \text{ avec} \\ \operatorname{div}_{\mathbf{A}[\underline{X}]}(f) &\longmapsto (\operatorname{div}_{\mathbf{K}[\underline{X}]}(f), \operatorname{div}_{\mathbf{A}}(c(f))) \text{ pour } (f \in \mathbf{A}[\underline{X}]). \end{aligned}$$

Démonstration.

Le groupe de divisibilité de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est $G = \mathbf{K}(\underline{X})^\times / \mathbf{A}^\times$, celui de $\mathbf{K}[\underline{X}]$ est $H = \mathbf{K}(\underline{X})^\times / \mathbf{K}^*$. Puisque $\mathbf{K}[\underline{X}]$ est un anneau à pgcd, $\operatorname{Div}(\mathbf{K}[\underline{X}])$ est simplement le groupe H , en passant en notation additive.

Pour un $f \in \mathbf{K}(\underline{X})^\times$ nous notons f_G sa classe dans G et f_H sa classe dans H . Nous notons \preceq la relation de divisibilité dans ces groupes.

On a un morphisme de groupes ordonnés $\varphi : G \rightarrow G' = H \times \operatorname{Div} \mathbf{A}$ donné par

$$\varphi(f_G) = (f_H, \operatorname{div}(c(p)) - \operatorname{div}(c(q))) \quad \text{où } f = p/q \text{ avec } p, q \in \mathbf{A}[\underline{X}].$$

D'après le lemme 3.6, ce morphisme est un isomorphisme sur son image, ce qui permet d'identifier G à un sous-groupe ordonné de G' .

On va montrer que φ satisfait les requêtes du projet divisoriel 2. Il nous reste à voir que tout élément $\Delta = (f_H, \delta)$ du groupe réticulé G' est borne inférieure d'une famille finie dans G . On peut supposer $\Delta \geq 0$. Cela signifie que $\delta \geq 0$ et $f_H = u_H$ pour un u dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$. Cela donne $\Delta = (u_H, \delta)$.

Pour $b \in \mathbf{A}^*$, on a $\operatorname{div}(c(bu)) = \operatorname{div}(b) + \operatorname{div}(c(u))$.

Soient b tel que $\operatorname{div}(b) \geq \delta - \operatorname{div}(c(u))$ et $w = bu \in \mathbf{A}[\underline{X}]$, alors $\varphi(w_G) = (u_H, \delta_1)$ avec $\delta_1 \geq \delta$. L'idéal $c(u)$ de \mathbf{A} admet un inverse divisoriel qui peut être écrit sous la forme $c(v)$ pour un $v \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. On a donc

$$\operatorname{div}(c(uv)) = \operatorname{div}(c(u)) + \operatorname{div}(c(v)) = \operatorname{div}(a)$$

pour un $a \in \mathbf{A}^*$ (voir le lemme 1.17). En outre $\delta = \operatorname{div}(c(r))$ avec $r \in \mathbf{A}[\underline{X}]$.

On pose $w' = uvr/a$, on a $\varphi(w'_G) = ((uvr)_H, \delta)$, et $u_H \preceq (uvr)_H$.

Finalement $\Delta = (u_H, \delta) = \varphi(w_G) \wedge \varphi(w'_G)$ dans G' . □

Un corollaire immédiat est le théorème suivant.

Théorème 3.8 Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs. Si le groupe réticulé $\operatorname{Div} \mathbf{A}$ est discret, ou de dimension 1, ou à décomposition partielle, ou à décomposition bornée, il en va de même pour $\operatorname{Div}(\mathbf{A}[\underline{X}])$.

Démonstration. Ceci résulte de ce que $\operatorname{Div}(\mathbf{A}[\underline{X}]) \simeq \operatorname{Div} \mathbf{A} \times \operatorname{Div}(\mathbf{K}[\underline{X}])$ (théorème 3.7) et de ce que $\operatorname{Div}(\mathbf{K}[\underline{X}])$ est discret et à décomposition bornée (a fortiori de dimension 1 et à décomposition partielle). □

Stabilité pour les extensions entières intégralement closes

Lemme 3.9 Soit \mathbf{A} un anneau intégralement clos de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps discret. Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} . Soient a, a', a_1, \dots, a_n dans \mathbf{A} .

1. L'élément a divise a' dans \mathbf{A} si, et seulement si, il divise a' dans \mathbf{B} .
2. L'élément a est un pgcd fort de (a_1, \dots, a_n) dans \mathbf{A} si, et seulement si, il l'est dans \mathbf{B} .

Démonstration. 1. Supposons que $x = a'/a \in \mathbf{K}$ soit dans \mathbf{B} , on doit montrer qu'il est dans \mathbf{A} . Cela résulte de ce que tout élément de \mathbf{B} est entier sur \mathbf{A} : $x \in \mathbf{K} \cap \mathbf{B}$ est entier sur \mathbf{A} donc dans \mathbf{A} .

2. Vu le point 1, l'affirmation dans \mathbf{B} est plus forte que celle dans \mathbf{A} . Comme la notion de pgcd fort est stable par multiplication par un élément de \mathbf{A}^* , on peut supposer que $a = 1$

est pgcd fort des a_i dans \mathbf{A} et on doit montrer qu'il l'est dans \mathbf{B} . Ainsi on doit montrer que si $b \in \mathbf{B}$ divise ya_1, \dots, ya_n dans \mathbf{B} ($y \in \mathbf{B}$), alors l'élément $z = y/b$ de \mathbf{L} est dans \mathbf{B} . Pour cela il suffit de montrer que z est entier sur \mathbf{A} . Par hypothèse $za_i \in \mathbf{B}$ pour chaque i .

On dispose de polynômes unitaires $g_i \in \mathbf{A}[X]$ qui annulent les za_i , et fournissent autant de polynômes de $\mathbf{K}[X]$ qui annulent $z : f_i(z) = g_i(za_i)/a_i^{m_i}$. On peut calculer dans $\mathbf{K}[X]$ le pgcd unitaire f de ces derniers polynômes

$$f(X) = X^m + \sum_{k < m} c_{m-k} X^k.$$

Alors pour chaque i , le polynôme $a_i^m f(X/a_i)$ divise g_i dans $\mathbf{K}[X]$, donc ses coefficients $c_1 a_i$, $c_2 a_i^2, \dots, c_m a_i^m$ sont dans \mathbf{A} par le théorème de Kronecker, parce que \mathbf{A} est intégralement clos. Par exemple les $c_2 a_i^2$ sont dans \mathbf{A} . Les a_i^2 sont de pgcd fort 1 donc $c_2 \in \mathbf{A}$. De même chaque c_k est dans \mathbf{A} . Et l'on a bien z entier sur \mathbf{A} . \square

Définition et notation 3.10 Pour toute liste $(a_1, \dots, a_n) = (\underline{a})$ dans \mathbf{A} , on note $K_{(\underline{a})}(T)$ le polynôme $\sum_{j=1}^n a_j T^{j-1}$. On dit que c'est le polynôme de Kronecker associé à la liste ordonnée (\underline{a}) .

Si $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_m)$ est une autre liste on définit $(\underline{a}) \star (\underline{b})$ par l'égalité $K_{(\underline{a}) \star (\underline{b})} = K_{(\underline{a})} K_{(\underline{b})}$. Si \mathbf{A} est un anneau à diviseurs, le corollaire 1.17 implique que

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) + \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{b}) = \text{div}_{\mathbf{A}}((\underline{a}) \star (\underline{b})).$$

Lemme 3.11 Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps discret. Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} .

Pour toute liste $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_n)$ dans \mathbf{B}^* il existe une liste $(\underline{b}') = (b'_1, \dots, b'_m)$ telle que la liste $(\underline{b}) \star (\underline{b}')$ soit dans \mathbf{A} et admette un pgcd fort dans \mathbf{A}^* .

Démonstration. On considère l'anneau $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}[b_1, \dots, b_n]$ qui est un \mathbf{A} -module de type fini. En fait \mathbf{B}_1 est un quotient d'un anneau \mathbf{C} (non nécessairement intègre) qui est une \mathbf{A} -algèbre libre de rang fini¹³. On considère le polynôme $B = K_{(\underline{b})} = \sum_{k=1}^n b_k T^{k-1}$ vu dans $\mathbf{C}[T]$, puis l'élément cotransposé $\tilde{B} \in \mathbf{C}[T]$.

Soit $N_B = N_{\mathbf{C}[T]/\mathbf{A}[T]}(B) \in \mathbf{A}[T]$. On a $N_B = B\tilde{B}$, et en revenant de \mathbf{C} à \mathbf{B}_1 , cela nous donne un $C \in \mathbf{B}_1[T]$ avec $BC = N_B$. Si $C = K_{(\underline{c})}$ et $N_B = K_{(\underline{d})}$ on a $(\underline{b}) \star (\underline{c}) = (\underline{d})$.

La liste (\underline{d}) de \mathbf{A} admet une inverse divisorielle $(a_1, \dots, a_q) = (\underline{a})$ dans \mathbf{A} . Ainsi $(\underline{d}) \star (\underline{a})$ admet un pgcd fort g dans \mathbf{A}^* . Le point 2 du lemme 3.9 nous dit que $(\underline{d}) \star (\underline{a})$ admet le pgcd fort g dans \mathbf{B} . Finalement on obtient que la liste $(\underline{b}) \star (\underline{c}) \star (\underline{a})$ est dans $\mathbf{A}[T]$ et qu'elle admet g pour pgcd fort (dans \mathbf{A}^* comme dans \mathbf{B}^*). Ainsi, la liste $(\underline{b}') = (\underline{c}) \star (\underline{a})$ satisfait les requêtes voulues. \square

Théorème 3.12 Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps discret. Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} .

1. L'anneau \mathbf{B} est un anneau à diviseurs.
2. On a un unique morphisme de groupes réticulés $\varphi : \text{Div } \mathbf{A} \rightarrow \text{Div } \mathbf{B}$ tel que

$$\varphi(\text{div}_{\mathbf{A}}(a)) = \text{div}_{\mathbf{B}}(a) \text{ pour } a \in \mathbf{A}.$$

Ce morphisme est injectif : cela permet d'identifier $\text{Div } \mathbf{A}$ à un sous-groupe réticulé de $\text{Div } \mathbf{B}$.

3. Soit $x \in \mathbf{B}$ et f un polynôme unitaire de $\mathbf{A}[X]$ (de degré d) qui annule x . Avec $\xi = \text{div}_{\mathbf{B}}(x)$ et D le ppcm des entiers $\in [1..d]$, on a des éléments $\gamma_k \in \text{Div } \mathbf{A} \subseteq \text{Div } \mathbf{B}$ dans le sous-groupe engendré par les diviseurs des coefficients de f , tels que $\bigwedge_k |D\xi - \gamma_k| = 0$.

13. On peut prendre $\mathbf{C} = \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]/\langle h_1(X_1), \dots, h_n(X_n) \rangle$ où $h_i \in \mathbf{A}[X_i]$ est unitaire. Notons que le polynôme N_B est un polynôme régulier de $\mathbf{A}[T]$ ($N_B(0) = N_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(b_1)$).

Démonstration. 1. Toute liste dans \mathbf{B}^* admet une inverse divisorielle d'après le lemme 3.11.

2. L'unicité si existence est claire car l'élément $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_i \text{div}_{\mathbf{A}}(a_i)$ de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ doit avoir pour image $\bigwedge_i \text{div}_{\mathbf{B}}(a_i) = \text{div}_{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Pour l'existence, montrons d'abord que l'on peut définir une application φ de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ dans $(\text{Div } \mathbf{B})^+$ en posant

$$\varphi(\delta) = \text{div}_{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_n) \text{ si } \delta = \text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \text{ pour des } a_i \text{ dans } \mathbf{A}^*.$$

Le lemme 3.9 nous dit que $\delta = 0$ implique $\varphi(\delta) = 0$.

Supposons que $\text{div}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a'_1, \dots, a'_m)$. Il existe donc une liste (\underline{x}) dans \mathbf{A} telle que les familles $(a_i x_j)_{i,j}$ et $(a'_i x_j)_{i,j}$ admettent un même pgcd fort g dans \mathbf{A} . Le lemme 3.9 nous dit que les familles $(a_i x_j)_{i,j}$ et $(a'_i x_j)_{i,j}$ admettent aussi le pgcd fort g dans \mathbf{B} , donc

$$\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}) + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(g) = \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}') + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{x}),$$

d'où $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}')$. Ceci montre que φ est bien définie.

Montrons que φ est injective. Si $\text{div}_{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_n) = \text{div}_{\mathbf{B}}(a'_1, \dots, a'_m)$, on considère une liste (\underline{x}) dans \mathbf{A} telle que la liste $(a_i x_j)_{i,j}$ admette un pgcd fort g dans \mathbf{A} . C'est aussi un pgcd fort dans \mathbf{B} , donc $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}) + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(g)$. Donc $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{a}') + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(g)$, ce qui signifie que la liste $(a'_i x_j)_{i,j}$ admet le pgcd fort g dans \mathbf{B} . Comme c'est une liste dans \mathbf{A} , elle admet aussi g comme pgcd fort dans \mathbf{A} . Donc $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}') + \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(g)$. Et $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}')$.

L'application φ que l'on vient de définir est un morphisme injectif de monoïdes positifs, de $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ dans $(\text{Div } \mathbf{B})^+$ et s'étend de manière unique en un morphisme de groupes réticulés, de $\text{Div } \mathbf{A}$ dans $\text{Div } \mathbf{B}$ (vérification laissée au lecteur).

3. Soit $f(X) = \sum_{j=1}^d a_j X^j \in \mathbf{A}[X]$ avec $a_d = 1$ et $f(x) = 0$. On considère les $\alpha_j = \text{div}_{\mathbf{B}}(a_j x^j)$ pour les $a_j \in \mathbf{A}^*$. Le fait 2.14 nous dit que

$$\bigwedge_{j>k, a_j, a_k \in \mathbf{A}^*} |\text{div}_{\mathbf{B}}(a_j x^j) - \text{div}_{\mathbf{B}}(a_k x^k)| = 0.$$

Or

$$\text{div}_{\mathbf{B}}(a_j x^j) - \text{div}_{\mathbf{B}}(a_k x^k) = (j - k) \text{div}_{\mathbf{B}}(x) - (\text{div}_{\mathbf{B}}(a_k) - \text{div}_{\mathbf{B}}(a_j))$$

et $\text{div}_{\mathbf{B}}(x) \geq 0$. On a donc $\bigwedge_{j>k} |D\xi - \alpha_{jk}^+| = 0$ pour des $\alpha_{jk}^+ \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$. \square

Théorème 3.13 *Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps discret. Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} (qui est un anneau à diviseurs d'après le théorème précédent).*

1. *Si \mathbf{L} admet une base discrète sur \mathbf{K} et si $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret (i.e. \mathbf{A} est à divisibilité explicite), alors $\text{Div } \mathbf{B}$ est discret.*
2. *Si $\text{Div } \mathbf{A}$ est de dimension ≤ 1 , il en va de même pour $\text{Div } \mathbf{B}$.*

Démonstration. 1. On doit tester $z \in \mathbf{B}$ pour un $z \in \mathbf{L}$. Puisque \mathbf{L} admet une base discrète sur \mathbf{K} , on peut calculer le polynôme minimal $f(X)$ de z sur \mathbf{K} . Et par le théorème de Kronecker, z est zéro un polynôme unitaire de $\mathbf{A}[X]$ si, et seulement si, son polynôme minimal sur \mathbf{K} est dans $\mathbf{A}[X]$.

2. Le point 3 du théorème 3.12 donne $\bigwedge_j |D\xi - \gamma_j| = 0$ pour des $\gamma_j \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$. On a un résultat du même type pour $\zeta = \text{div}(z)$. On aura donc une double égalité

$$\bigwedge_h |D\xi - \beta_h^+| = 0 = \bigwedge_h |M\zeta - \beta_h^+|$$

où les $\beta_h \in \text{Div } \mathbf{A}$. Par le lemme 2.15 on obtient $\mathcal{C}(D\xi) \subseteq \mathcal{C}(M\zeta) \boxplus \mathcal{C}(M\zeta)^\perp$.

Enfin $\mathcal{C}(D\xi) = \mathcal{C}(\xi)$ et $\mathcal{C}(M\zeta) = \mathcal{C}(\zeta)$. \square

Autres propriétés de stabilité

La proposition suivante est une sorte de réciproque du théorème 3.12 dans un cas particulier.

Proposition 3.14 *Soit \mathbf{B} un anneau à diviseurs, Γ un groupe fini d'automorphismes de \mathbf{B} et $\mathbf{A} = \mathbf{B}^\Gamma$ le sous-anneau des points fixes de Γ . Alors \mathbf{A} est un anneau à diviseurs.*

Démonstration. Tout d'abord, \mathbf{A} est intégralement clos parce que \mathbf{B} est intégralement clos. Par ailleurs \mathbf{B} est entier sur \mathbf{A} parce que Γ est fini. Donc \mathbf{B} est la clôture intégrale de \mathbf{A} dans $\text{Frac}(\mathbf{B})$, ce qui nous amène, à la fin de la démonstration, dans la situation du théorème 3.12.

On considère une liste finie dans \mathbf{A} pour laquelle on cherche une inverse divisorielle. Cette liste donne les coefficients d'un polynôme $f \in \mathbf{A}[X]$. Comme la liste admet une inverse divisorielle dans \mathbf{B} , il existe $g, h \in \mathbf{B}[X]$ et $d \in \mathbf{B}^*$ tels que

$$fg = dh \text{ et } \text{Gr}_{\mathbf{B}}(c(h)) \geq 2. \quad (*)$$

En transformant $(*)$ par les $\sigma \in \Gamma$ et en faisant le produit des égalités obtenues on a une égalité

$$f^N G = D H \text{ avec } N = |\Gamma|, G = \prod_{\sigma \in \Gamma} \sigma(g), \text{ etc.}$$

On écrit ceci sous la forme

$$f(f^{N-1}G) = DH \text{ où } G, H \in \mathbf{A}[X] \text{ et } D \in \mathbf{A} \quad (\#)$$

On a $\text{Gr}_{\mathbf{B}}(c(H)) \geq 2$ car $\text{Gr}_{\mathbf{B}}(c(h)) \geq 2$. On applique alors le point 2 du lemme 3.9 et on obtient $\text{Gr}_{\mathbf{A}}(c(H)) \geq 2$. Ainsi $(\#)$ fournit un inverse divisoriel de l'idéal $c(f)$ dans \mathbf{A} . \square

Exemple. Soit \mathbf{k} un corps discret de caractéristique $\neq 2$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}[\underline{X}]$ l'anneau des polynômes en n indéterminées ($n \geq 2$) et \mathbf{A} le sous-anneau des polynômes pairs. Alors \mathbf{A} est un anneau à diviseurs, en tant qu'égal à \mathbf{B}^Γ , avec $\Gamma = \langle \sigma \rangle$, où σ échange X_i et $-X_i$ pour chaque i . On a par exemple dans \mathbf{A} un diviseur irréductible non principal $\text{div}_{\mathbf{A}}(gX_1, gX_2)$ pour chaque polynôme irréductible impair g dans \mathbf{B} ($\text{div}_{\mathbf{B}}(gX_1, gX_2) = \text{div}_{\mathbf{B}}(g)$). \blacksquare

4 Anneaux de Krull

Définition et premières propriétés

Définition 4.1 *On appelle anneau de Krull un anneau à diviseurs non trivial dont le groupe des diviseurs est discret et à décomposition bornée.*

Un corps discret est un anneau de Krull dont le groupe des diviseurs est nul. Ce sont les autres anneaux de Krull qui nous intéressent, ceux pour lesquels existent des diviseurs strictement positifs.

Définition 4.2 *Un anneau à diviseurs est dit à décomposition complète (resp. à décomposition partielle) si son groupe des diviseurs est à décomposition complète (resp. à décomposition partielle).*

Exemples. 1) Si $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ ou un corps discret, $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau à pgcd à divisibilité explicite et l'on montre facilement que c'est un anneau de Krull. Il est à décomposition complète lorsque $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ et pour certains corps discrets, comme \mathbb{Q} et ses extensions finies, ou les corps algébriquement clos.

2) Un anneau de valuation discrète est évidemment un anneau de Krull local de dimension 1. Pour une réciproque voir le lemme 4.5.

3) Les exemples de base d'anneaux de Krull à décomposition complète sont les anneaux factoriels et les domaines de Dedekind, à condition qu'ils soient à factorisation totale. Voir aussi le théorème 4.14. ■

Le fait qui suit rassemble des conséquences de la proposition 2.10 concernant les groupes réticulés lorsqu'on l'applique au groupe des diviseurs. Le point 3 nous donne une version de [8, théorème 1, §1.19], que nous reprenons ici dans un cadre constructif plus général. C'est un outil très utile qui remplace souvent de manière efficace la propriété de décomposition complète.

Fait 4.3

1. Un anneau à diviseurs à décomposition complète est un anneau de Krull.
2. En mathématiques classiques, les deux notions sont équivalentes car tout groupe réticulé discret à décomposition bornée est alors à décomposition complète¹⁴.
3. Un anneau de Krull est à décomposition partielle.
4. Le groupe des diviseurs d'un anneau de Krull \mathbf{A} est de dimension ≤ 1 : pour tout $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$ on a $\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(\alpha) \boxplus \mathcal{C}(\alpha)^\perp$.

Le théorème suivant nous donne un exemple paradigmatique d'anneau de Krull.

Théorème 4.4

1. Un anneau géométrique intégralement clos est un anneau de Krull.
2. La clôture intégrale d'un anneau géométrique intègre dans son corps de fractions est un anneau de Krull.

Démonstration. 1. Cas particulier de 2.

2. Avec un changement de variables on obtient une mise en position de Noether qui fait apparaître l'anneau géométrique \mathbf{A} comme une extension finie d'un anneau de polynômes $\mathbf{C} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_r]$. L'anneau \mathbf{C} est un anneau à pgcd à factorisation bornée, donc un anneau de Krull. Si \mathbf{A} est intègre, $\text{Frac } \mathbf{A}$ est une extension finie de $\mathbf{k}(X_1, \dots, X_r)$. On conclut alors par le théorème 4.17. □

Concernant le cas crucial des anneaux de valuation discrètes, la situation en mathématiques constructives est un peu plus délicate qu'en mathématiques classiques comme l'indique le lemme suivant, qui complète le lemme 1.21. En mathématiques classiques tout anneau de Krull est à décomposition complète et les cinq points sont équivalents.

Lemme 4.5 (Anneaux de valuation discrète, 2)

Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs et un $\alpha > 0$ dans $\text{Div } \mathbf{A}$ (par exemple $\alpha = \text{div}(a)$ avec $a \in \mathbf{A}^* \setminus \mathbf{A}^\times$). Considérons les propriétés suivantes.

1. \mathbf{A} est un anneau de valuation discrète.
2. \mathbf{A} est un anneau de Krull local de dimension 1.
3. \mathbf{A} est un anneau de Krull local et $\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(\alpha)$.
4. \mathbf{A} est un anneau principal local à factorisation bornée et $\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(\alpha)$.
5. $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret et $|\text{Div } \mathbf{A} : \mathbb{Z}\alpha| \leq k$ pour un $k \geq 0$.

14. On notera que pour ce point la démonstration classique utilise le tiers exclu (pour le test d'irréductibilité d'un diviseur) mais pas l'axiome du choix.

On a l'implication $1 \Rightarrow 2$, et les équivalences $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$.

L'implication $2 \Rightarrow 1$ est valable si \mathbf{A} est à décomposition complète.

Démonstration. Dans chacun des points on a $\text{Div } \mathbf{A}$ discret, i.e. \mathbf{A} à divisibilité explicite.

$4 \Rightarrow 3$, $1 \Rightarrow 5$, et $1 \Rightarrow 2$. Clair.

$2 \Rightarrow 3$, 4 et 5 . En tant qu'anneau à diviseurs local de dimension 1, \mathbf{A} est un anneau de valuation (théorème 1.19). Pour un $\xi \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$ arbitraire, on considère une base de décomposition partielle (π_1, \dots, π_r) pour (α, ξ) . Les π_i sont deux à deux orthogonaux, et dans un anneau de valuation deux diviseurs > 0 sont toujours comparables. Donc un et un seul des π_i , par exemple π_1 , est > 0 . On a donc $\alpha = \ell\pi_1$ pour un $\ell \geq 1$, $\xi = m\pi_1$ pour un $m \geq 0$, d'où $\mathbb{Z}\pi_1 \subseteq \text{Div } \mathbf{A} \subseteq \mathbb{Q}\alpha$. Enfin si k majore le nombre d'éléments non nuls dans une écriture de α comme somme d'éléments ≥ 0 , on aura nécessairement $|\text{Div } \mathbf{A} : \mathbb{Z}\alpha| \leq k$ et $\text{Div } \mathbf{A} \subseteq \frac{1}{k!}\mathbb{Z}\alpha$.

$3 \Rightarrow 2$. On note que $\mathcal{C}(\alpha)$ est absolument borné. Le point 1 du théorème 4.10 nous dit que \mathbf{A} est un anneau principal, donc de dimension ≤ 1 . Il s'agit en fait d'un anneau de valuation et comme ce n'est pas un corps, il est de dimension exactement 1.

$5 \Rightarrow 4$. De l'inégalité $|\text{Div } \mathbf{A} : \mathbb{Z}\alpha| \leq k$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subseteq \text{Div } \mathbf{A} \subseteq \frac{1}{k!}\mathbb{Z}\alpha$. Donc $\text{Div } \mathbf{A}$ est à décomposition bornée et absolument borné, donc \mathbf{A} est un anneau de Krull principal (théorème 4.10). Il reste à montrer que \mathbf{A} est un anneau local. Supposons que $x + y$ est inversible. Les diviseurs $\text{div } x$ et $\text{div } y$ s'expriment sous forme $m\pi$ et $n\pi$ pour un $\pi \in \text{Div } \mathbf{A}$. Comme $0 = \text{div}(x + y) \geq \text{div}(x) \wedge \text{div}(y)$, on a bien $\text{div}(x)$ ou $\text{div}(y)$ nul.

$4 \Rightarrow 1$ (lorsque \mathbf{A} est à décomposition complète) : si α est minoré par un diviseur irréductible π , il est clair que $\text{Div } \mathbf{A} = \mathbb{Z}\pi$. \square

Théorème d'approximation simultanée et conséquences

Le point 2 du théorème suivant nous donne une version de [8, théorème 2, §1.20] dans un cadre constructif plus général.

Théorème 4.6 (Théorème d'approximation simultanée) *Soit \mathbf{A} un anneau de Krull.*

1. Soient (π_1, \dots, π_r) des diviseurs > 0 deux à deux orthogonaux et (n_1, \dots, n_k) dans \mathbb{N} . Notons $\pi = \sum_i \pi_i$ et $\alpha = \sum_i n_i \pi_i$. Il existe $a \in \mathbf{A}^*$ tel que $\text{div}_{\mathbf{A}}(a) = \alpha + \rho$ avec $\rho \geq 0$ et $\rho \perp \pi$ (a fortiori $\rho \perp \alpha$).
2. Pour tout $\alpha \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$ et tout $\gamma \geq \alpha$ on peut trouver $a \in \mathbf{A}^*$ tel que $\text{div } a = \alpha + \rho$ avec $\rho \geq 0$ et $\rho \perp \gamma$.

Démonstration. 1. On suppose en un premier temps les π_j irréductibles.

Pour chaque $i \in \llbracket 1..k \rrbracket$ on va trouver un x_i tel que

$$\text{div}_{\mathbf{A}}(x_i) = n_i \alpha_i + \beta_i, \beta_i = \sum_{j \neq i} m_j \pi_j + \rho_i \text{ avec } m_j \geq n_j + 1 \text{ et } \rho_i \perp \pi \quad (*)_i.$$

Construisons par exemple x_1 . Nous considérons $\gamma_1 = (n_1 - 1)\pi_1 + \pi$. C'est un diviseur que l'on écrit $\text{div}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_m)$ pour des $c_i \in \mathbf{A}^*$. On considère une base de décomposition partielle pour $(\pi_1, \dots, \pi_r, c_1, \dots, c_m)$.

Comme elle ne raffine aucun des π_i , pour l'un des c_j , qui est le x_1 recherché, la condition $(*)_1$ est réalisée.

Une fois les x_i construits on considère $x = \sum_i x_i$. On calcule une base de décomposition partielle pour (x, x_1, \dots, x_r) . Comme elle ne raffine pas les π_i on peut appliquer le lemme 4.7, et l'on obtient que $\text{div}_{\mathbf{A}}(x) = \sum_{i=1}^r n_i \pi_i + \rho$ avec $\rho \perp \pi$.

Voyons le cas général. On reprend le calcul précédent. Si à une étape du calcul un ou plusieurs des π_j se décomposent, on remplace (π_1, \dots, π_r) par la liste raffinée et on reprend tous les

calculs depuis le début. Cet inconvénient ne peut se produire qu'un nombre fini de fois. À la fin le calcul se déroule comme si les π_i étaient irréductibles.

2. On considère une base de décomposition partielle (π_1, \dots, π_r) pour (α, γ) .

On écrit $\alpha = \sum_{i \in [1..r]} n_i \pi_i$ et on applique le point 1. \square

Lemme 4.7 Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs avec $\text{Div } \mathbf{A}$ discret.

On suppose donnés (x_1, \dots, x_n) dans \mathbf{A}^* , avec $\sum_i x_i = 0$, et (π_1, \dots, π_r) une base de décomposition partielle pour (ξ_1, \dots, ξ_n) (où $\xi_i = \text{div}_{\mathbf{A}}(x_i)$). On écrit $\xi_i = \sum_{j=1}^r n_{ij} \pi_j$. Alors pour chaque $j \in [1..r]$, la valeur minimum de n_{ij} est atteinte au moins deux fois.

Démonstration. Puisque $\sum_i x_i = 0$ on a pour chaque $i \in [1..n]$ $\xi_i \geq \bigwedge_{k \neq i} \xi_k$, ce qui donne $n_{ij} \geq \bigwedge_{k \neq i} n_{kj}$ pour chaque $j \in [1..r]$. En particulier si n_{ij} est la plus petite valeur (pour ce j fixé), cet entier doit être égal à l'un des n_{kj} pour $k \neq i$. \square

On obtient maintenant des corollaires importants du théorème 4.6.

Théorème 4.8 (Théorème un et demi pour les anneaux de Krull)

Soit \mathbf{A} un anneau de Krull et $\alpha \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$.

1. Pour tout $a \in \mathbf{A}^*$ tel que $\alpha \leq \text{div}(a)$ il existe $b \in \mathbf{A}^*$ tel que

$$\alpha = \text{div}(a) \wedge \text{div}(b) = \text{div}(a^n) \wedge \text{div}(b) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Pour tout $c \in \mathbf{K}^*$ tel que $\text{div}(c) \leq \alpha$ il existe $d \in \mathbf{K}^*$ tel que $\alpha = \text{div}(c) \vee \text{div}(d)$.

Démonstration. 1. On pose $\gamma = \text{div}(a)$. Le théorème 4.6 nous donne un $b \in \mathbf{A}$ tel que $\text{div}(b) = \alpha + \rho$ avec $\rho \geq 0$ et $\rho \perp \gamma$. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{div}(b) \wedge \text{div}(a^n) = (\alpha + \rho) \wedge n\gamma = (\alpha \vee \rho) \wedge n\gamma = (\alpha \wedge n\gamma) \vee (\rho \wedge n\gamma) = \alpha \vee 0 = \alpha.$$

2. Soit a avec $\text{div}(a) \geq \alpha$ puis $\beta = \text{div}(a) - \alpha$. On a $\text{div}(c) \leq \alpha$, donc $0 \leq \beta \leq \text{div}(\frac{a}{c})$ avec $\frac{a}{c} \in \mathbf{A}^*$. Le point 1. nous donne un $e \in \mathbf{A}^*$ tel que $\beta = \text{div}(\frac{a}{c}, e)$, donc

$$\alpha = \text{div}(a) - \beta = \text{div}(a) + (\text{div}(\frac{e}{a}) \vee \text{div}(\frac{1}{e})) = \text{div}(c) \vee \text{div}(\frac{a}{e}),$$

d'où le résultat avec $d = \frac{a}{e}$. \square

Corollaire 4.9 Soit \mathbf{A} un anneau de Krull, et $a, b \in \mathbf{A}^*$. Il existe c et $d \in \mathbf{A}^*$ tels que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \text{div}_{\mathbf{A}}(a, b, c, d) = 0.$$

D'où l'on déduit (en choisant de mettre a en valeur) :

- $\langle a, b \rangle \langle a, c \rangle = a \langle a, b, c, d \rangle$,
- $\text{div}_{\mathbf{A}}(a, b) + \text{div}_{\mathbf{A}}(a, c) = \text{div}_{\mathbf{A}}(a)$,
- $\text{Idv}(a, b) = (a : c)_{\mathbf{A}}$ et $\text{Idv}(a, c) = (a : b)_{\mathbf{A}}$.

En particulier, pour tout diviseur $\alpha \geq 0$, et tout $a \in \mathbf{A}^*$ tel que $\text{div}(a) \geq \alpha$, il existe $c \in \mathbf{A}^*$ tel que $\text{Idv}(\alpha) = (a : c)_{\mathbf{A}}$.

Démonstration. Posons $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(a, b)$ et $\beta = \text{div}(a) - \alpha$ ⁽¹⁵⁾. En appliquant le théorème un et demi à β et a , il existe $c \in \mathbf{A}^*$ tel que $\beta = \text{div}(a, c)$. Puisque $\alpha + \beta = \text{div}(a)$ on obtient que $\langle a, b \rangle \langle a, c \rangle$ admet a pour pgcd fort. En particulier bc est divisible par a , on écrit $bc = ad$ et l'on obtient $\langle a, b \rangle \langle a, c \rangle = a \langle a, b, c, d \rangle$ donc $\text{div}(a, b, c, d) = 0$.

Le dernier point résulte de ce que

$$\text{div}(a, b) = \text{div}(a) - \text{div}(a, c) = \text{div}(1) \vee \text{div}(\frac{a}{c}),$$

donc $\text{Idv}(a, b) = \mathbf{A} \cap \frac{a}{c} \mathbf{A}$. \square

15. Si \mathbf{A} est cohérent on peut prendre $\beta = \text{div}_{\mathbf{A}}(b)$ où $\mathfrak{b} = (a : \langle a, b \rangle) = (a : b)$

Remarque. Si \mathbf{A} est un domaine de Prüfer possédant la propriété un et demi (par exemple s'il est de dimension ≤ 1), on a la même propriété sous une forme plus forte : $\text{div}(a, b, c, d) = 0$ est remplacé par $\langle a, b, c, d \rangle = \langle 1 \rangle$. ■

Le théorème 4.10 est une version constructive du théorème suivant en mathématiques classiques : *un anneau de Krull avec seulement un nombre fini de diviseurs irréductibles est un anneau principal* (conséquence de [22, théorème 12.2]).

Théorème 4.10 *Soit \mathbf{A} un anneau de Krull.*

1. *Si $\text{Div } \mathbf{A}$ est absolument borné, \mathbf{A} est un anneau principal.*
2. *Si $\text{Div } \mathbf{A}$ est engendré par les diviseurs irréductibles (π_1, \dots, π_r) , on obtient en outre*
 - *\mathbf{A} est un anneau principal à factorisation totale,*
 - *si $\pi_i = \text{div}_{\mathbf{A}}(p_i)$, l'élément $q = \prod_{i=1}^r p_i$ engendre l'idéal $\text{Rad } \mathbf{A}$,*
 - *les idéaux maximaux détachables de \mathbf{A} sont les $\langle p_i \rangle$.*
3. *Pour un $a \in \mathbf{A}^*$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*
 - (a) *$\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(\text{div}_{\mathbf{A}}(a))$ (qui est absolument borné).*
 - (b) *\mathbf{A} est un anneau principal et $a \in \text{Rad } \mathbf{A}$.*

Démonstration. 2. Tout d'abord, il est clair que $\text{Div } \mathbf{A}$ est à décomposition complète. Comme un diviseur orthogonal à tous les π_i est nul, pour tous (n_1, \dots, n_r) dans \mathbb{N} , le théorème 4.6 nous donne un $a \in \mathbf{A}^*$ tel que $\text{div}_{\mathbf{A}}(a) = \sum_i n_i \pi_i$. Ainsi tout diviseur est principal, autrement dit \mathbf{A} est un anneau à pgcd.

Montrons maintenant que \mathbf{A} est un anneau de Bezout. Pour cela il suffit de montrer que si b et c ont pour pgcd 1, ils sont comaximaux. On écrit

$$\text{div}(b) = \sum_{i \in I} m_i \pi_i, \text{div}(c) = \sum_{i \in J} m_i \pi_i \text{ avec les } m_i > 0 \text{ et } I \cap J = \emptyset.$$

Soit $K = \llbracket 1..r \rrbracket \setminus (I \cup J)$ et $d = \prod_{k \in K} p_k$. Alors $\text{div}(b + cd) = 0$ par le lemme 4.7 (dans la décomposition des trois éléments $\text{div}(b)$, $\text{div}(cd)$ et $\text{div}(b + cd)$, la valeur minimum 0 doit être atteinte au moins deux fois sur chaque composante π_i). Ainsi $b + cd \in \mathbf{A}^\times$, et $\langle b, c \rangle = 1$.

Montrons que $q \in \text{Rad } \mathbf{A}$. I.e., pour $x \in \mathbf{A}^*$, $1 + xq \in \mathbf{A}^\times$ (ou encore $\text{div}_{\mathbf{A}}(1 + xq) = 0$). Dans la décomposition des trois éléments $\text{div}_{\mathbf{A}}(1)$, $\text{div}_{\mathbf{A}}(1 + xq)$ et $\text{div}_{\mathbf{A}}(xq)$, la valeur minimum 0 doit être atteinte au moins deux fois sur chaque composante π_i (lemme 4.7).

Montrons que $\text{Rad } \mathbf{A} \subseteq \langle q \rangle$. Si $b \in \mathbf{A}$ et si un des p_i ne figure pas dans les diviseurs de b , on a $\langle b, p_i \rangle = 1$ et donc $1 + xb = yp_i$ pour x et y convenables, donc $1 + xb$ n'est pas inversible. On laisse à la lectrice le soin de montrer que les $\langle p_i \rangle$ sont les idéaux maximaux détachables.

1. Les démonstrations dans le point 2 fonctionnent en remplaçant les π_i du point 2 par des bases de décomposition partielle pour les éléments de \mathbf{A} qui définissent les diviseurs qui entrent dans la preuve. Les détails sont laissés au lecteur.

$3b \Rightarrow 3a$. D'après le lemme 3.2.

$3a \Rightarrow 3b$. L'anneau est principal d'après le point 1. Concernant $a \in \text{Rad } \mathbf{A}$ on reprend la preuve du point 2 en s'appuyant sur des bases de décomposition partielle. □

Remarques. 1) Dans le point 3a on ne peut pas remplacer l'hypothèse par la simple existence d'un élément régulier dans $\text{Rad } \mathbf{A}$: il y a des anneaux factoriels locaux de dimension de Krull arbitraire.

2) En mathématiques classiques tout anneau de Krull \mathbf{A} avec $\text{Div } \mathbf{A}$ absolument borné relève du point 2 ci-dessus. D'un point de vue constructif, la situation est plus problématique : il est même impossible d'obtenir qu'un anneau de Krull à décomposition complète avec $\text{Div } \mathbf{A}$ absolument borné contient un élément a tel que $\text{Div } \mathbf{A} = \mathcal{C}(a)$. ■

Exemple. On donne ici un anneau de Krull non cohérent. C'est aussi un anneau local à pgcd. Il n'est pas cohérent (cela montre aussi qu'il n'est pas noethérien). En mathématiques

classiques c'est un anneau factoriel en tant qu'anneau de Krull à pgcd. En outre il est de dimension de Krull ≤ 2 . C'est l'exemple 5.2 dans [12, Glaz].

On considère le corps discret $\mathbf{F} = \mathbb{F}_2((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}})$, puis l'anneau local $\mathbf{B} = \mathbf{F}[x, y]_{1+\langle x, y \rangle}$. On pose $p_i = a_i x + b_i y$ et l'on définit un automorphisme γ de \mathbf{B} par

$$\gamma(x) = x, \gamma(y) = y, \gamma(a_i) = a_i + y p_{i+1}, \gamma(b_i) = b_i + x p_{i+1} \text{ pour tout } i.$$

On a $\gamma(p_i) = p_i$ et γ engendre le groupe $G = \{\text{Id}, \gamma\}$ d'ordre 2. Enfin \mathbf{A} est le sous-anneau \mathbf{B}^G des points fixes de G . ■

Localisations d'un anneau de Krull, diviseurs irréductibles

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.1 et de la proposition 2.16. On notera que les hypothèses du point 2 sont toujours satisfaites en mathématiques classiques.

Théorème 4.11 *Soient \mathbf{A} un anneau de Krull, S un filtre ne contenant pas 0, et H_S le sous-groupe solide de $\text{Div } \mathbf{A}$ engendré par les $\text{div}_{\mathbf{A}}(s)$ pour $s \in S$. Alors \mathbf{A}_S est un anneau à diviseurs, $\text{Div } \mathbf{A}_S$ est à décomposition bornée et de dimension ≤ 1 , et il y a un unique morphisme de groupes réticulés $\varphi_S : \text{Div } \mathbf{A} \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}_S$ tel que $\varphi_S(\text{div}_{\mathbf{A}}(a)) = \text{div}_{\mathbf{A}_S}(a)$ pour tout $a \in \mathbf{A}^*$.*

On a en outre les précisions qui suivent.

1. *Si \mathbf{A}_S est à divisibilité explicite, \mathbf{A}_S est un anneau de Krull.*
2. *Si H_S est détachable et si $\text{Div } \mathbf{A} = H_S \boxplus H'$ pour un sous-groupe solide H' , \mathbf{A}_S est un anneau de Krull et le morphisme φ_S est un morphisme de passage au quotient par H_S : il permet d'identifier $\text{Div } \mathbf{A}_S$ au groupe réticulé quotient $(\text{Div } \mathbf{A})/H_S \simeq H'$.*

Rappelons que pour un anneau à diviseurs arbitraire, on a une bijection naturelle entre les ensembles suivants (théorème 1.13).

- Les diviseurs irréductibles.
- Les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$.

Les points 2 à 4 du théorème suivant rajoutent quelques précisions pour les anneaux de Krull qui ne sont pas des corps (on suppose d'existence d'un diviseur strictement positif).

Théorème 4.12 *Soient \mathbf{A} un anneau de Krull, α un diviseur > 0 et $S_\alpha = \{x \in \mathbf{A}^* \mid \text{div } x \perp \alpha\}$.*

1. *L'anneau $\mathbf{B} = S_\alpha^{-1} \mathbf{A}$ est un anneau principal avec $\text{Div } \mathbf{B} \simeq \mathcal{C}(\alpha)$. En particulier on a un élément régulier dans $\text{Rad } \mathbf{B}$ et une borne a priori sur le nombre d'éléments deux à deux étrangers dans \mathbf{B} .*
2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
 - (a) *α est un diviseur irréductible.*
 - (b) *$\mathcal{C}(\alpha) = \mathbb{Z}\alpha$.*
 - (c) *$\text{Idv}(\alpha)$ est un idéal premier.*
 - (d) *S_α est un filtre premier de hauteur ≤ 1 et $\mathbf{A} = S_\alpha \cup \text{Idv}(\alpha)$ (union disjointe de deux parties détachables).*
 - (e) *$S_\alpha^{-1} \mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète et si $p/1$ est une uniformisante, on a $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(p) \bmod \mathcal{C}(\alpha)^\perp$.*
3. *Si \mathbf{A} est à décomposition complète, on obtient selon le point 2. des bijections entre les trois ensembles suivants.*
 - Les diviseurs irréductibles.
 - Les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$.

- Les filtres premiers détachables de hauteur 1.
- 4. Si \mathbf{A} est cohérent, les quatre ensembles suivants sont égaux.
 - Les idéaux divisoriels finis premiers $\neq \langle 1 \rangle$.
 - Les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle$ tels que $\text{div}(\mathfrak{q}) > 0$.
 - Les idéaux de type fini premiers $\mathfrak{q} \neq \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$ tels que $\mathfrak{q} = \text{Idv}(\mathfrak{q})$.
 - Les idéaux de type fini premiers détachables de hauteur 1.

Démonstration. 1. Résulte du point 1 du théorème 3.5 et du théorème 4.10.

2. C'est le point 2 du théorème 3.5. Ici intervient seulement le fait que $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret de dimension 1.

3. Il reste à vérifier qu'un filtre premier S de hauteur 1 est de la forme S_π pour un diviseur irréductible π .

Le localisé \mathbf{A}_S est par définition un anneau local de dimension ≤ 1 . D'après le point 1 du théorème 3.1, c'est un anneau à diviseurs dont le groupe des diviseurs $\text{Div}(\mathbf{A}_S)$ est un quotient de $\text{Div } \mathbf{A}$. En tant qu'anneau à diviseurs local de dimension 1, \mathbf{A}_S est un anneau de valuation (théorème 1.19).

Soit $x \in \mathbf{A}^* \setminus S$, on a $\text{div}_{\mathbf{A}_S}(x) > 0$ car $x \notin \mathbf{A}_S^\times$. On considère la décomposition de $\xi = \text{div}_{\mathbf{A}}(x)$ sous forme $\sum_i n_i \pi_i$ avec les π_i irréductibles et les $n_i \in \mathbb{N}^*$. Les π_i restent deux à deux orthogonaux dans \mathbf{A}_S , et dans un anneau de valuation deux diviseurs > 0 sont toujours comparables. Donc un et un seul des π_i , appelons le π , reste > 0 dans $\text{Div}(\mathbf{A}_S)$. De la même manière tout diviseur irréductible distinct de π dans $\text{Div } \mathbf{A}$ s'annule dans $\text{Div}(\mathbf{A}_S)$. Ceci montre que $\text{Div}(\mathbf{A}_S) \simeq (\mathbb{Z}, \geq)$ avec π comme seul diviseur irréductible, correspondant à $1 \in \mathbb{Z}$ dans l'isomorphisme. Tous les $y \in \mathbf{A}$ tels que $\text{div}_{\mathbf{A}}(y) \perp \pi$ dans \mathbf{A} sont dans S car $\text{div}_{\mathbf{A}_S}(y) = 0$, i.e. ce sont des unités de \mathbf{A}_S . Ainsi on obtient bien $S = S_\pi$.

4. C'est le point 3 du théorème 3.5. □

On se propose maintenant d'étudier, autant que faire se peut, « toutes » les localisations d'un anneau de Krull à décomposition complète.

Le théorème 4.13 généralise pour les anneaux de Krull à décomposition complète des résultats simples dans le cas d'un anneau factoriel. Il résulte essentiellement du théorème 4.11 et du lemme 2.11. En mathématiques classiques il donne une description exhaustive des localisés d'un anneau de Krull. En mathématiques constructives on se limite aux localisations en des filtres détachables particuliers. Ce théorème complète pour les anneaux de Krull le lemme 2.11 qui décrit les sous-groupes détachables d'un groupe réticulé à décomposition complète.

Théorème 4.13 *Soient \mathbf{A} un anneau de Krull à décomposition complète et I l'ensemble de ses diviseurs irréductibles. On reprend les notations du théorème 3.1.*

1. Si S est un filtre et si H_S est détachable, alors S est détachable, égal à

$$\{x \in \mathbf{A} \mid \forall \pi \in I, \pi \leq \text{div}(x) \Rightarrow \pi \in H_S\}.$$

En outre $\text{Div}(\mathbf{A}_S) \simeq (\text{Div } \mathbf{A})/H_S \simeq H_S^\perp$.

2. Si H est un sous-groupe solide détachable de $\text{Div } \mathbf{A}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{A} \mid \forall \pi \in I, \pi \leq \text{div}(x) \Rightarrow \pi \in H\}$$

est un filtre détachable S et $H_S = H$.

3. On obtient ainsi des bijections entre les trois ensembles suivants.

- Les filtres S de \mathbf{A} tels que H_S est détachable.
- Les sous-groupes solides détachables de $\text{Div } \mathbf{A}$.
- Les parties détachables de I .

On suppose dans la suite que S est un filtre avec H_S détachable.

4. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) Le filtre S est de hauteur 1.
- (b) L'anneau \mathbf{A}_S est un anneau de Dedekind à factorisation totale.

Dans ce cas les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (c) Le sous-ensemble $I \cap H_S^\perp$ de I est fini non vide.
- (d) $\text{Rad}(\mathbf{A}_S)$ contient un élément non nul.
- (e) L'anneau \mathbf{A}_S est principal et les diviseurs irréductibles de \mathbf{A}_S forment un ensemble fini non vide.

5. Le filtre S est premier de hauteur 1 si, et seulement si, $I \cap H_S^\perp$ est un singleton $\{\pi\}$. Dans ce cas l'idéal premier $\mathfrak{p} = \mathbf{A} \setminus S$ est égal à $\text{Idv}(\pi)$.

6. Si S est premier de hauteur $\neq 0, 1$, $I \cap H_S^\perp$ est infini et $\text{div}(\mathfrak{p}) = 0$.

Démonstration. La démonstration est laissée à la lectrice. \square

Remarque. Dans le cadre des anneaux de Krull à décomposition complète, il ne semble pas que l'on puisse démontrer que H_S est détachable dès que S est un filtre détachable (contrairement au cas des anneaux factoriels). De même on ne peut pas calculer en général la hauteur d'un filtre S sous la seule hypothèse que H_S est détachable. ■

Un anneau est dit *pleinement Lasker-Noether* lorsqu'il est noethérien cohérent fortement discret et que tout idéal radical est intersection finie d'idéaux premiers de type fini (voir [23]). Rappelons qu'en mathématiques classiques tout anneau noethérien est pleinement Lasker-Noether, et donc, d'après le théorème 4.14, tout anneau noethérien intégralement clos est un anneau de Krull à décomposition complète.

Théorème 4.14 *Un anneau intégralement clos pleinement Lasker-Noether est un anneau de Krull à décomposition complète.*

Démonstration. Dans un anneau de Krull \mathbf{A} , on a vu que tout élément irréductible de $\text{Div } \mathbf{A}$ est de la forme $\text{div}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{p})$ pour un idéal premier détachable \mathfrak{p} de hauteur 1. Dans [23], il est montré que pour un anneau pleinement Lasker-Noether, on peut calculer explicitement les idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent un $a \in \mathbf{A}^*$ fixé. Ceci permet ensuite de calculer la décomposition complète du diviseur principal $\text{div } a$ en somme de diviseurs irréductibles (en utilisant le fait que $\text{Div } \mathbf{A}$ est discret). Les détails sont laissés au lecteur. \square

Stabilité pour les extensions polynomiales

Théorème 4.15 *Soit \mathbf{A} un anneau de Krull et \mathbf{K} son corps de fractions.*

- 1. $\mathbf{A}[X]$ est aussi un anneau de Krull.
- 2. $\mathbf{A}[X]$ est à décomposition complète si, et seulement si, \mathbf{A} et $\mathbf{K}[X]$ sont à décomposition complète.

Démonstration. Ceci résulte de ce que $\mathbf{A}[X]$ est un anneau à diviseurs avec $\text{Div}(\mathbf{A}[X]) \simeq \text{Div } \mathbf{A} \times \text{Div}(\mathbf{K}[X])$ (théorème 3.7). \square

Stabilité pour les extensions entières intégralement closes

Théorème et définition 4.16 (Norme d'un diviseur)

Soit \mathbf{A} un anneau à diviseurs non trivial de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps qui admet une base finie comme \mathbf{K} -espace vectoriel. Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} . L'anneau \mathbf{B} est aussi un anneau à diviseurs. On sait construire un homomorphisme de groupes ordonnés $N^* : \text{Div } \mathbf{B} \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}$ qui satisfait les propriétés suivantes

1. $N^*(\text{div}_{\mathbf{B}}(b)) = \text{div}_{\mathbf{A}}(N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(b))$ pour tout $b \in \mathbf{B}$.
2. Pour $\beta \in (\text{Div } \mathbf{B})^+$, on a $\beta = 0 \iff N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\beta) = 0$.
3. Pour tout $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$, $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\alpha) = [\mathbf{L} : \mathbf{K}] \alpha$.

On note $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$ cet homomorphisme, on l'appelle le morphisme norme.

Démonstration. On rappelle qu'une base de \mathbf{L} sur \mathbf{K} est aussi une base de $\mathbf{L}[T]$ sur $\mathbf{K}[T]$ ou de $\mathbf{L}(T)$ sur $\mathbf{K}(T)$. Ceci implique que la fonction norme $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ s'étend de manière naturelle en $N_{\mathbf{L}[T]/\mathbf{K}[T]}$ ou en $N_{\mathbf{L}(T)/\mathbf{K}(T)}$. On continue à la noter $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$. On pose $r = [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$.

Rappelons aussi que dans la situation où $\mathbf{K} = \text{Frac}(\mathbf{A})$, \mathbf{A} intégralement clos, et \mathbf{B} clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} , on a $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{A}$: en fait pour $x \in \mathbf{B}$, le polynôme caractéristique de x a tous ses coefficients dans \mathbf{A} , et l'élément cotransposé \tilde{x} (qui vérifie $x\tilde{x} = N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(x)$) est un élément de \mathbf{B} (par exemple en utilisant [18, corollaire III-8.6]).

Rappelons enfin que $\mathbf{B}[T]$ est la clôture intégrale de $\mathbf{A}[T]$ dans $\mathbf{L}(T)$. Tout ceci implique que la norme d'un élément $g \in \mathbf{B}[T]$ est un élément de $\mathbf{A}[T]$ et que $\tilde{g} \in \mathbf{B}[T]$.

On considère les ensembles $\text{Lst}(\mathbf{B})^*$ et $\text{Lst}(\mathbf{A})$ et l'application $N : \text{Lst}(\mathbf{B})^* \rightarrow \text{Lst}(\mathbf{A})$ définie comme suit

$$\begin{aligned} N(b_1, \dots, b_m) &= (a_1, \dots, a_p), \quad \text{où} \quad K_{(b)} = \sum_{k=1}^m b_k T^{k-1} \\ \text{et} \quad N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(b)}) &= \sum_{\ell=1}^p a_\ell T^{\ell-1} \end{aligned}$$

Enfin on définit $\nu : \text{Lst}(\mathbf{B})^* \rightarrow (\text{Div } \mathbf{A})^+$ par $\nu(b) = \text{div}_{\mathbf{A}}(N(b))$. A priori on a $p \leq (m-1)r+1$. Notons que pour tout $\alpha \in \text{Div } \mathbf{A}$, on a $\nu(\alpha) = r\alpha$. Cela résulte de ce que si $\alpha = \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$, alors $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(\underline{a})}) = K_{(\underline{a})}^r = K_{(\underline{c})}$, donc $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{c}) = r \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$ par le corollaire 1.17.

On démontre alors les points suivants.

1. Les applications N et ν sont bien définies, autrement dit les a_i sont dans \mathbf{A} et l'un au moins est régulier. En effet $K_{(b)} \in \mathbf{B}[T]$ donc $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(b)}) \in \mathbf{A}[T]$ d'après les remarques préliminaires. Par ailleurs $K_{(b)}$ est régulier, donc la multiplication par $K_{(b)}$ est injective (de $\mathbf{L}[T]$ vers $\mathbf{L}[T]$), ce qui implique que son déterminant $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(b)})$ est régulier.

2. Si $(b) = (b_i)_{i \in [1..n]}$ et $(c) = (c_j)_{j \in [1..m]}$ sont dans $\text{Lst}(\mathbf{B})^*$, on a défini

$$(b) \star (c) = \left(\sum_{i+j=\ell+1} b_i c_j \right)_{\ell \in [1..m+n-1]}$$

On a $K_{(b) \star (c)} = K_{(b)} K_{(c)}$, donc $N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(b) \star (c)}) = N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(b)}) N_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(K_{(c)})$.

Et en utilisant le corollaire 1.17 ceci implique

$$\nu((b) \star (c)) = \nu(b) + \nu(c).$$

3. Si $\text{div}_{\mathbf{B}}(b) = 0$ alors $\nu(b) = 0$. Soit $(b') = (b'_1, \dots, b'_m)$ telle que la liste $(\underline{a}) = (b) \star (b')$ soit dans \mathbf{A} et admette un pgcd fort g dans \mathbf{A}^* (lemme 3.11). Donc $(\underline{a}) = g(\underline{a}')$ avec $\text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}') = 0$. Ceci donne $\text{div}_{\mathbf{B}}(b') = \text{div}_{\mathbf{B}}(b) + \text{div}_{\mathbf{B}}(b') = \text{div}_{\mathbf{B}}(g)$. Donc g est pgcd fort dans \mathbf{B} de la liste (b') . En particulier on peut écrire $(b') = g(\underline{c})$ avec $(b) \star (c) = (\underline{a}')$. Ceci implique $\nu(b) + \nu(b') = \nu(\underline{a}') = r \text{div}_{\mathbf{A}}(\underline{a}') = 0$, donc $\nu(b) = 0$.

4. Si $\nu(b) = 0$ alors $\text{div}_{\mathbf{B}}(b) = 0$.

En effet, considérons la liste $(b') \in \text{Lst}(\mathbf{B})^*$ définie par $\widetilde{K_{(b)}} = K_{(b')}$, alors

$$0 = \nu(b) = \text{div}_{\mathbf{A}}(N(b)) = \text{div}_{\mathbf{A}}(c(K_{(b)} K_{(b')})),$$

et comme $\text{Div } \mathbf{A}$ s'identifie à un sous-groupe réticulé de $\text{Div } \mathbf{B}$ on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}_{\mathbf{A}} (c(K_{(\underline{b})}K_{(\underline{b}')})) = \text{div}_{\mathbf{B}} (c(K_{(\underline{b})}K_{(\underline{b}')})) \\ &= \text{div}_{\mathbf{B}} ((\underline{b}) \star (\underline{b}')) = \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}) + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}'). \end{aligned}$$

5. En conséquence des points précédents l'élément $\nu(\underline{b}) \in (\text{Div } \mathbf{A})^+$ ne dépend que de $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b})$ et l'application correspondante

$$N^* : (\text{Div } \mathbf{B})^+ \rightarrow (\text{Div } \mathbf{A})^+$$

est un morphisme de monoïdes, qui s'étend de manière unique en un morphisme (en général non injectif) de groupes ordonnés $N^* : \text{Div } \mathbf{B} \rightarrow \text{Div } \mathbf{A}$.

Quelques précisions.

On démontre d'abord que l'application $\nu : \text{Lst}(\mathbf{B})^* \rightarrow (\text{Div } \mathbf{A})^+$ « passe au quotient », c'est-à-dire que si $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(1)}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(2)})$, alors $\nu(\underline{b}^{(1)}) = \nu(\underline{b}^{(2)})$.

Pour ceci considérons une liste (\underline{c}) dans \mathbf{B}^* telle que $(\underline{b}^{(1)}) \star (\underline{c})$ admette un pgcd fort e , autrement dit $(\underline{b}^{(1)}) \star (\underline{c}) = e(\underline{z})$ (*) où la liste (\underline{z}) admet 1 pour pgcd fort. Cela signifie $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(1)}) + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{c}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(e)$. L'égalité (*) implique $\nu(\underline{b}^{(1)}) + \nu(\underline{c}) = \nu(e) + \nu(\underline{z})$, i.e. $\nu(\underline{b}^{(1)}) + \nu(\underline{c}) = \nu(e)$ car $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{z}) = 0$ implique $\nu(\underline{z}) = 0$.

Comme $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(2)}) + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{c}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(e)$, on a aussi $\nu(\underline{b}^{(2)}) + \nu(\underline{c}) = \nu(e)$ dans $(\text{Div } \mathbf{A})^+$. D'où $\nu(\underline{b}^{(1)}) = \nu(\underline{b}^{(2)})$.

Une fois que l'on sait que N^* définit une opération de $(\text{Div } \mathbf{B})^+$ vers $(\text{Div } \mathbf{A})^+$, on voit que c'est un morphisme pour l'addition. Comme l'image réciproque de 0 est 0 et puisque $(\text{Div } \mathbf{B})^+$ et $(\text{Div } \mathbf{A})^+$ sont les parties positives de $\text{Div } \mathbf{A}$ et $\text{Div } \mathbf{B}$, il en résulte que N^* s'étend de manière unique en un morphisme de groupes ordonnés. \square

Théorème 4.17 *Soit \mathbf{A} un anneau de Krull de corps de fractions \mathbf{K} et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps qui admet une base finie sur \mathbf{K} . Soit \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} . Alors \mathbf{B} est un anneau de Krull.*

Démonstration. On sait déjà que \mathbf{B} est un anneau à diviseurs (théorème 3.12) et que $\text{Div } \mathbf{B}$ est discret (théorème 3.13). Il reste à montrer que $\text{Div } \mathbf{B}$ est à décomposition bornée.

On considère une décomposition $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}) = \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(1)}) + \dots + \text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(\ell)})$ dans $(\text{Div } \mathbf{B})^+$. Au moyen du morphisme norme $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$ elle est transformée en une décomposition de $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\underline{b})$ dans $(\text{Div } \mathbf{A})^+$. Puisque $\text{Div } \mathbf{A}$ est à décomposition bornée, si ℓ est suffisamment grand, un des termes $N_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\underline{b}^{(i)})$ de cette décomposition est nul. Et ceci implique $\text{div}_{\mathbf{B}}(\underline{b}^{(i)}) = 0$. \square

Remarque. Comme cas particulier, si \mathbf{A} est un domaine de Dedekind à factorisation bornée, il en va de même pour \mathbf{B} (il n'est donc pas nécessaire de supposer l'extension \mathbf{L}/\mathbf{K} séparable). \blacksquare

Conclusion

Nous sommes assez convaincus par l'introduction de l'article [2, Aubert], où l'auteur déplore que seul Jaffard ait compris Lorenzen, alors que Bourbaki, Gilmer et Larsen-McCarthy par exemple se sont enfoncés dans les idéaux divisoriels qui manquent absolument de finitude. Ici nous avons enfoncé encore un peu plus le clou, en ne faisant jamais référence à l'« ensemble » de tous les idéaux fractionnaires ni à la théorie des \star -opérations sur cet « ensemble ».

Notons que nos anneaux à diviseurs sont exactement les *anneaux avec une théorie des pgcds de type fini* de [20, Lucius]. Lucius attribue la véritable paternité à Aubert tout en rectifiant une erreur. L'article de Lucius est surtout consacré aux anneaux de Krull : en rajoutant une condition de type noethérien, il obtient ce qu'il appelle les *anneaux avec une théorie des diviseurs*, qui sont les anneaux de Krull. Il attribue à [25, Skula] le fait d'avoir

élucidé le rapport entre l'approche qu'il propose (que nous avons grosso modo suivie, mais dans un cadre simplifié et constructif) et la présentation du problème dans [4].

Signalons aussi les articles [1, Arnold] et [6, Clifford] dans lesquels une théorie purement multiplicative, à savoir l'étude des « monoïdes avec une théorie des diviseurs » est donnée pour le cas « Krull », c'est-à-dire lorsqu'on demande la décomposition unique en facteurs premiers. Plus précisément, pour un monoïde $(S, \cdot, 1)$ « réduit » (ce qui veut dire que 1 est le seul élément inversible) et « régulier » (ce qui veut dire que tout élément est simplifiable), on examine dans quelles conditions il est contenu dans un monoïde Σ jouissant des trois propriétés suivantes :

- Σ est isomorphe à un monoïde $(\mathbb{N}^{(I)}, +, 0)$ (i.e. un monoïde réduit régulier avec décomposition unique en facteurs premiers),
- pour a, b in S , on a $a|b$ dans S si, et seulement si, $a|b$ dans Σ ,
- tout élément de Σ est borne inférieure d'une famille finie dans S .

Autrement dit, c'est l'approche habituellement attribuée à [4] mais dans un cadre épuré (pas de condition non multiplicative) et plus général (pas d'anneau intègre, seulement un monoïde multiplicatif). La thèse de Clifford, reportée dans [6] consiste à généraliser les résultats d'Arnold dans le cadre de monoïdes plus généraux. Clifford cite [26, van der Waerden] comme ayant découvert de manière indépendante essentiellement les mêmes résultats qu'Arnold, au moins pour le cadre des anneaux noethériens intègres.

Quant aux travaux d'Aubert et Lucius, que nous avons repris ici dans un cadre constructif, ils consistent à laisser tomber la condition de décomposition unique en facteurs premiers et à demander seulement que Σ soit partie positive d'un groupe réticulé.

Remerciements. Le travail du premier auteur a été financé par le projet ERC (FP7/2007-2013) / ERC grant agreement nr. 247219. Nous remercions Marco Fontana et Mohammed Zafrullah pour toutes les informations et conseils utiles concernant l'approche des PvMD dans la littérature classique, ainsi que leurs réponses à des questions délicates. Nous remercions aussi tout particulièrement Claude Quitté pour sa collaboration efficace, sans laquelle cet article n'aurait pas vu le jour.

Références

- [1] ARNOLD I. (1929). Ideale in kommutativen Halbgruppen. *Rec. Math. Soc. Moscow* **36**, 401–407. 2, 42
- [2] AUBERT K. (1983). Divisors of finite character. *Ann. Mat. Pura Appl.* **38**, 327–360. 2, 5, 41
- [3] BIGARD A., KEIMEL K., WOLFENSTEIN S. (1977). *Groupes et anneaux réticulés*. LNM Vol. 608. Springer-Verlag, Berlin-New York. 20
- [4] BOREVITCH Z. I., CHAFAREVITCH I. R. (1967). *Théorie des nombres*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Gauthier-Villars, Paris. 2, 5, 6, 42
- [5] CHANG G.W. (2008). Prüfer \star -multiplication domains, Nagata rings, and Kronecker function rings. *Journal of Algebra* **319**, 309–319. 2
- [6] CLIFFORD A. H. (1938). Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups. *Annals of Math.* **39**, 594–610. 2, 42
- [7] COQUAND T. (2014). Recursive functions and constructive mathematics. Chapitre 6 dans Bourdeau M., Dubucs J. (Eds.), *Constructivity and Computability in Historical and Philosophical Perspective*. Logic, Epistemology and the Unity of Science Vol. 34. Dordrecht : Springer, Heidelberg, London. 12
- [8] EDWARDS H. M. (1990). *Divisor Theory*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. 1, 33, 34

- [9] FONTANA M., LOPER K. (2006). An historical overview of Kronecker function rings, Nagata rings, and related star and semistar operations. p. 169–187 in *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra. A tribute to the work of Robert Gilmer*, Jim Brewer, Sarah Glaz, William Heinzer, and Bruce Olberding Editors, Springer, New-York. [2](#), [18](#)
- [10] FONTANA M., ZAFRULLAH M. (2009). A “ v -operation free” approach to Prüfer v -multiplication domains. *Int. J. Math. Math. Sci.* Article ID 349010, 8 pages. [2](#)
- [11] FONTANA M., ZAFRULLAH M. (2011). On v -domains : a survey. In *Commutative Algebra : Noetherian and non-Noetherian Perspectives* (M. Fontana, S. Kabbaj, B. Olberding, and I. Swanson Editors), Springer, New York. 145–179. [2](#)
- [12] GLAZ S. (2001). Finite conductor rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129**, 2833–2843. [15](#), [37](#)
- [13] GRIFFIN M. (1967). Some results on v -multiplication rings. *Canad. Math.* **19**, 710–722. [2](#)
- [14] HALTER-KOCH F. (2011). Characterization of Prüfer-like monoids and domains by gcd-theories, *Comm. Algebra* **39**, 486–496. [2](#)
- [15] JAFFARD P. (1960). *Les systèmes d'idéaux*. Dunod, Paris. [2](#)
- [16] KANG B. G. (1989). Prüfer v -multiplication domains and the ring $R[X]_{N_v}$. *J. Algebra*. **123**, 151–170. [19](#)
- [17] KRULL W. (1936). Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. II. v -Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche. *Math. Z.* **41**, Vol. 6, 665–679. [2](#)
- [18] LOMBARDI H., QUITTÉ C. (2015). *Commutative algebra : constructive methods. Finite projective modules*. Translated from the French. Springer, Berlin. [1](#), [9](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [20](#), [23](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [40](#)
- [19] LORENZEN P. (1939). Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. *Math. Z.* **45**, n°6, 533–553. [2](#)
- [20] LUCIUS F. (1998). Rings with a theory of greatest common divisors. *Manuscripta Math.* **95**, 117–136. [2](#), [41](#)
- [21] LUCIUS F. (1998). Kronecker’s Divisor Theory and the Generalization of Notions and Theorems of Classical Algebraic Number Theory to Krull Domains. *Mathematica Gottingensis* Vol. 13, 17 pages. [2](#)
- [22] MATSUMURA H. (1989). *Commutative ring theory*. Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 8. Cambridge University Press, Cambridge. [15](#), [16](#), [28](#), [36](#)
- [23] MINES R., RICHMAN F., RUITENBURG W. *A Course in Constructive Algebra*. Universitext. Springer-Verlag, (1988). [39](#)
- [24] PRÜFER H. (1932). Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. *J. Reine Angew. Math.* **168**, 1–36. [2](#)
- [25] SKULA L. (1970). Divisorentheorie einer Halbgruppe. *Math. Z.* **114**, 113–120. [41](#)
- [26] VAN DER WAERDEN B. L. (1929). Zür Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringe. *Math. Annalen* **101**, 293–308. [2](#), [42](#)
- [27] ZAFRULLAH M. (2006). What w -coprimality can do for you. Dans *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra : A tribute to the work of Robert Gilmer*, Jim Brewer, Sarah Glaz, William Heinzer, and Bruce Olberding Editors, Springer, New-York. 387–404 [8](#)

Table des matières

Introduction	1
1 Anneaux à diviseurs	3
Pgcd fort, ppcm et profondeur ≥ 2	3
Idéaux divisoriellement inversibles	4
Projet pour le groupe des diviseurs	5
Le théorème de base	6
Exprimer un diviseur comme borne supérieure de diviseurs principaux	10
Quand le groupe des diviseurs est-il discret ?	12
Diviseurs irréductibles	12
Propriétés de clôture intégrale	14
Anneaux à diviseurs de dimension ≤ 1	15
Anneaux de valuation discrète	16
Localisations d'un anneau à diviseurs, 1	17
Un anneau à la Kronecker	18
Principe local-global et applications	18
2 Propriétés de décomposition des groupes réticulés	20
Groupes réticulés quotients	20
Un principe de recouvrements par quotients	20
Groupes réticulés de dimension 1	21
Groupes totalement ordonnés de dimension 1	22
Sous-groupes premiers d'un groupe réticulé	22
Propriétés de décomposition générales	23
3 Propriétés de stabilité pour les anneaux à diviseurs	26
Localisations d'un anneau à diviseurs, 2	26
Anneaux avec groupe des diviseurs de dimension 1	27
Stabilité pour les anneaux de polynômes	28
Stabilité pour les extensions entières intégralement closes	29
Autres propriétés de stabilité	32
4 Anneaux de Krull	32
Définition et premières propriétés	32
Théorème d'approximation simultanée	34
Localisations d'un anneau de Krull, diviseurs irréductibles	37
Stabilité pour les extensions polynomiales	39
Stabilité pour les extensions entières intégralement closes	40
Conclusion	41
Références	42